



# 【立体解析幾何学】を用いた エームズの部屋の製作

大阪教育大学附属高等学校天王寺校舎

“騙し絵”工房

新保奈央（高Ⅲ）

佐野大地（高Ⅱ）

鄭海人（高Ⅱ）

### 1. はじめに

私たちの学校は SSH(スーパーサイエンスハイスクール)の指定校であるため、各分野の先生の研究室で様々なことを研究することができる。そして私たちが所属している大石明徳先生の研究室では「数学とコンピューターを用いて絵や模様を描く」といったテーマで各班が研究している。大石先生の研究室では以前、「エイムズの部屋をベクトルで解析する」という研究に取り組んでいたことを知り、私たちはエイムズの部屋をベクトル以外の方法で解析することができるのではないかと考え、立体解析幾何学を用いてエイムズの部屋を解析した。

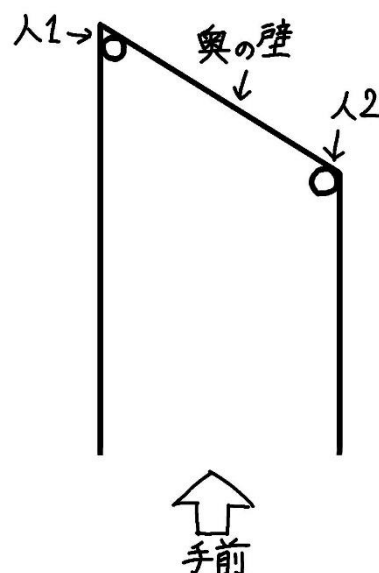
### 2. エイムズの部屋の仕組み

まず、エイムズの部屋とは【写真 1】のように、人が左右に一人ずつ立つと片方だけ（【写真 1】では右側に立った人）が極端に大きくなって見えるといったトリックアートである。

【図 1】はエイムズの部屋を上から見たものである。このように奥の壁が左右の壁と垂直に接していないため、人 2 が人 1 よりも前に位置している。よって手前から見たとき人 2 が極端に大きくなって見えるといった仕組みである。



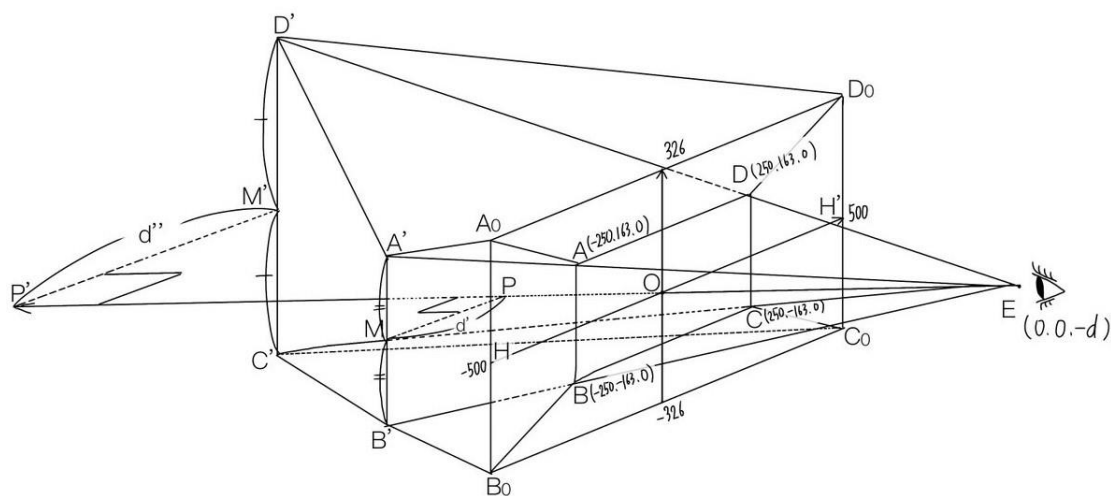
【写真 1】：エイムズの部屋の一例



【図 1】：上から見たエイムズの部屋

### 3. エイムズの部屋の解析とプログラム化

(1) 解析



[図 2]

解析では、[図 2] と立体解析幾何学の考え方をを用いて、コンピューターの画面上にエイムズの部屋の展開図を出力するために必要な 3 つの面である台形の“上底、下底、高さ”を数式化した。

◎台形  $A_0B_0B'A'$  の上底( $A_0B_0$ )の長さ、下底( $A'B'$ )の長さ、高さを求める

そのために点  $A'$  の座標を求める。

$E(0, 0, -d)$   $A(-250, 163, 0)$  を  $xy$  平面上で考えると  $E(0, 0)$   $A(-250, 163)$

よって  $xy$  平面上での直線  $EA'$  の方程式は  $y = -163x/250$

$E(0, 0, -d)$   $A(-250, 163, 0)$  を  $yz$  平面上で考えると  $E(0, -d)$   $A(163, 0)$

よって  $yz$  平面上での直線  $EA'$  の方程式は  $y = dy/163 - d$

二つの方程式より、直線  $EA'$  の方程式は、 $-dx/250 = dy/163 = z + d$

この方程式に  $x = d'$  を代入すると、 $A'(-d', 163d'/250, dd'/250 - d)$

台形  $A_0B_0B'A'$  は等脚台形であるため、

$B'(-d', -163d'/250, dd'/250 - d)$

$M(-d', 0, dd'/250 - d)$

よって

上底は 652、下底は  $163d'/125$ 、高さは  $\sqrt{(-500 + d')^2 + (-dd'/250 + d)^2}$

◎台形  $D_0C_0C'D'$  の上底( $D_0C_0$ )の長さ、下底( $D'C'$ )の長さ、高さを求める

そのために点  $D'$  の座標を求める。

点  $A'$  と同様にすると、

$D'(d'', 163d''/250, dd''/250 - d)$

台形  $D_0C_0C'D'$  は等脚台形であるため、

$C'(d'', -163d''/250, dd''/250-d)$

$M'(d'', 0, dd''/250-d)$

よって

上底は 652、下底は  $163d''/125$ 、高さは  $\sqrt{(-500+d')^2 + (-dd'/250+d)^2}$

◎台形の上底(D0C0)の長さ、下底(D'C')の長さ、高さを求める

上底は  $163d'/125$ 、下底は  $163d''/125$ 、高さは  $\sqrt{(d'+d'')^2 + (dd'/250 - dd'/250)^2}$

## (2) プログラム化

前節の解析の結果(3つの面である台形の上底、下底、高さ)をもとに、『眼から部屋の最前面までの距離、向かって左側の壁の奥行き、希望の倍率(左奥の物体の大きさを右奥の物体の何倍に見せたいか)』を数値で入力すると、希望の倍率にあったエイムズの部屋の壁面を一つずつ出力することができるプログラムを作成した。それは以下のとおりである。

```
100 CLEAR
110 INPUT PROMPT "眼までの距離d":d
120 INPUT PROMPT "左壁までの距離d1":d1
130 INPUT PROMPT "倍率k":k
140 LET d2=-k*(-d1)
150 LET H1M1=SQR((-500+d2)^2+(-d*d2/250+d)^2)
160 SET bitmap SIZE 1000,652
170 SET WINDOW 0,50+H1M1+50,-326*(50+H1M1+50)/1000,
    326*(50+H1M1+50)/1000
180 SET LINE COLOR 1
190 INPUT PROMPT "1.左壁 2.右壁 3.奥壁 4.手前壁":壁番号
200 IF 壁番号=1 THEN GOTO 240
210 IF 壁番号=2 THEN GOTO 280
220 IF 壁番号=3 THEN GOTO 320
230 IF 壁番号=4 THEN GOTO 360
240 PLOT LINES:0,163*d1/250;0,-163*d1/250;
    SQR((-500+d1)^2+(-d*d1/250+d)^2),-326;
    SQR((-500+d1)^2+(-d*d1/250+d)^2),326;
    0,163*d1/250
250 SET AREA COLOR 38
260 flood 10,0
270 GOTO 410
280 PLOT LINES:0,163*d2/250;0,-163*d2/250;
    H1M1,-326;H1M1,326;0,163*d2/250
290 SET AREA COLOR 38
300 flood 10,0
310 GOTO 410
320 PLOT LINES:0,163*d2/250;0,-163*d2/250;
    SQR((d1+d2)^2+(d*d2/250-d*d1/250)^2),-163*k;
    SQR((d1+d2)^2+(d*d2/250-d*d1/250)^2),163*k;
    0,163*d2/250
330 SET AREA COLOR 56
340 flood 10,0
350 GOTO 410
360 PLOT LINES:0,326;0,-326;1000,-326;1000,326;0,326
370 PLOT LINES:50,276;50,-276;950,-276;950,276;50,276
380 SET AREA COLOR 44
390 flood 10,0
400 GOTO 410
410 END
```

## 4. プログラムの実行から組み立てまで

ここからは実際にプログラムを実行し出力し、それを印刷し倍率が2倍3倍になるような模型を作るまでの過程を記す。

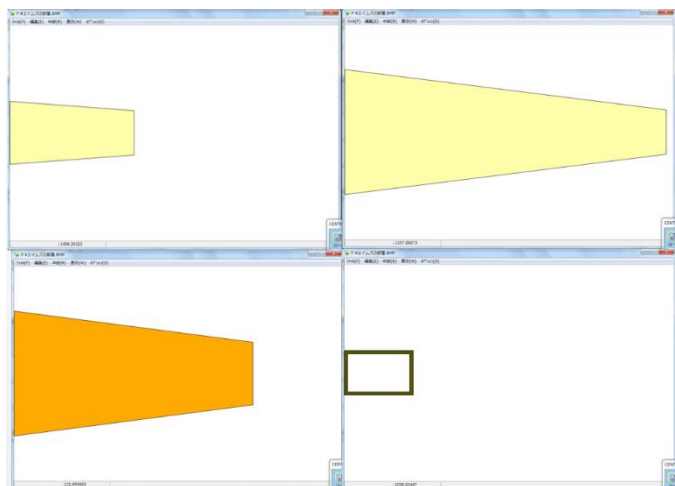
### (1) プログラムの出力結果

今回私たちが作ったプログラムは、部屋から目までの距離・向かって左壁の奥行き・倍率を入力することでエイムズの部屋の展開図を出力することができる。

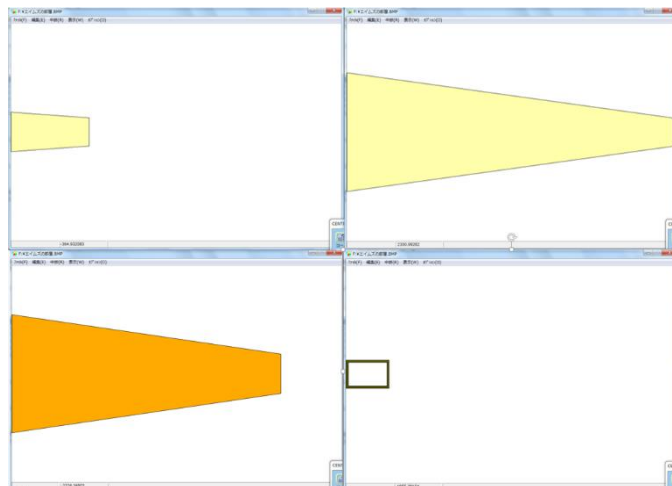
今回のエイムズの部屋の模型は、部屋から目までの距離を 1000・向かって左壁の奥行きを

700 に固定し、倍率を 2 倍、3 倍とした 2 つの模型を作った。

倍率 2 倍の出力結果



倍率 3 倍の出力結果



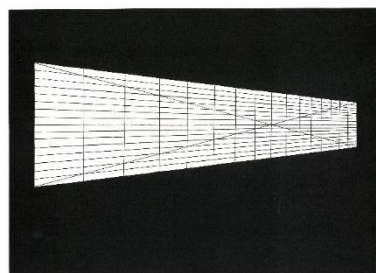
## (2) 窓とドアの作成

(1) で出力した結果をプリンタで印刷し、左壁にはドア、右壁には窓を作った。作図方法は以下のとおりである。

- ① 図に対角線を描く
- ② 左右の辺を 16 等分してつなぐ
- ③ ①と②の交点を結ぶ

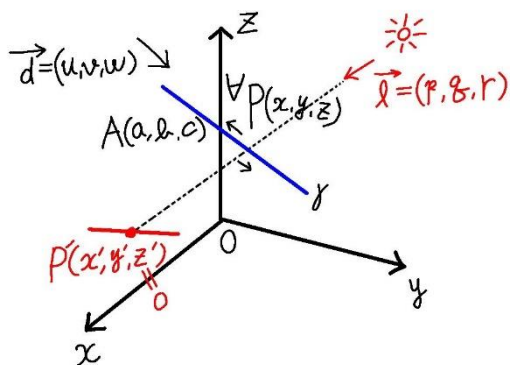
書いたものが [写真 2] である。

このマスに合わせて、ドアと窓を作る



[写真 2]

ここからは、遠近法を用いてみた際に直線に見えるものが、なぜ放物線などゆがんだ戦ではなく直線で表すことができるのかを証明していく。



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$$

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t(u, v, w)$$

$[x=a+ut \cdot y=b+vt \cdot z=c+wt]$  ← 直線  $\gamma$  の媒介変数表示 (点 P の座標) を①と置く

P を通り  $\vec{l}$  に平行な直線の媒介変数表示は

$$(X, Y, Z) = (x, y, z) + s(p, q, r)$$

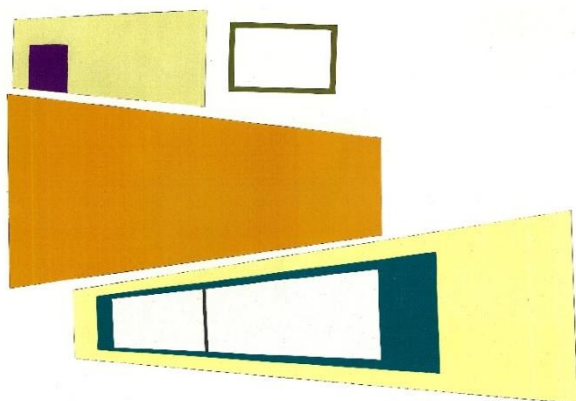
$[X=x+ps \cdot Y=y+qs \cdot Z=z+rs]$  ←  $s$  が媒介変数

これと xy 平面との交点 P' の座標を求める

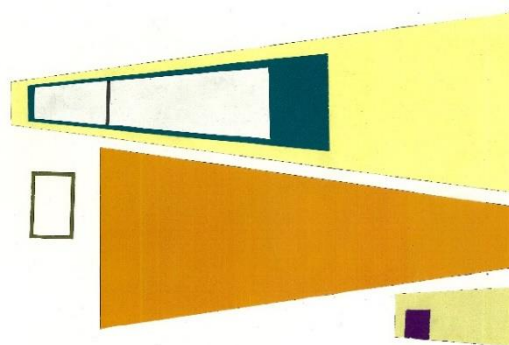
$Z=0$  とおくと、 $z+rs=0$  つまり  $s=-z/r$

$[X=x-pz/r(=x') \cdot Y=y-qz/r(=y')]$  これ等と①から

$[x'=a-cp/r+(u+pw/r)t \cdot y'=b-cq/r+(v-qw/r)t]$  これは xy 平面上の直線を表している。



倍率 2 倍のパーツ



倍率 3 倍のパーツ

### (3) パーツの組み立て



倍率 2 倍のエイムズの部屋



倍率 3 倍のエイムズの部屋

それぞれのパーツを印刷したケント紙を切り取り、補強のため針金を用いて 4 面を張り合わせて組み立てた。

#### (4) 撮影



倍率 2 倍のエイムズの部屋



倍率 3 倍のエイムズの部屋

撮影したエイムズの部屋は倍率 2 倍、3 倍それぞれこのようになった。

しかしこれらは実際には **【写真 3】** から天井と床を切り抜き、背景を合成することでできたものである。

上部と下部に素材を付けた立体の部屋を作らず、後から合成した理由としては、上部と下部はどちらも向かい合う辺がねじれの位置に存在するため、一平面で作ることができない。つまり撮影時に天井と床に不自然な線や影が入るためである。



**【写真 3】**

#### 5. まとめ

**【写真 4】** からわかる通り、撮影に使った人形は全く同じサイズのものである。



**【写真 4】**

今回の研究はエイムズの部屋を立体解析幾何で解析することを目的とし達成することができたが、いくつかの改善点を見つけた。まず一つ目は前述の通り、エイムズの部屋の天井と床は合成されているという点である。そして二つ目は、撮影されたエイムズの部屋の写真を見てもらうとわかる通り、奥の壁の右側が陰ってしまっている点である。これは "4 の (3) パーツの組み立て" の写真からわかるように、奥の壁の右側は、右壁との角度が鋭角になっているため、左壁と鈍角で接している左側よりも光が入ってこないからである。

私たちが研究を進めるにあたって感じたこの 2 点の改善点を踏まえて次の研究に生かしてもらうことで、今後発展した研究を進めていくことができるだろう。

**【引用】【写真 1】** <https://www.trickart.co.jp/solid/412>