

花瓶の製作

一回転曲面の展開および画像の貼り付け



大阪教育大学附属高等学校天王寺校舎

回転曲面解析班 小橋口純 宮崎悠人 小川佳菜

花瓶の製作 一回転曲面の展開および画像の貼り付け

第0章 目次 等

第1章：花瓶の展開図出力のコンピュータによる自動化および花瓶にさす花づくり(小川佳菜)-----	p.1~p.3
第2章：画像の湾曲化による花瓶の表面への画像の貼り付け(宮崎悠人)-----	p.3~p.5
第3章：縦切りの花瓶(小橋口純)-----	p.6~p.8
第4章：結論-----	p.8
第5章：感想(小橋口純)-----	p.8

はじめに

私達は『本年度の大石明徳先生の「情報」の授業で行った「文様付き壺の製作」および同先生の(昨年度の)SSH 関連授業「ブルーII」での活動を発展させれば、授業内容を遥かに超える「モノ作り」を実現できるのではないか』と思い今回の研究を始め、その成果をこのような論文をまとめるに至りました。その結果(これはあくまで結果的にですが)、本論文の第1章、第2章の内容は“第3回貴大学数理工学コンテスト”で優秀賞を受賞なさった私達の先輩の論文に(少しだけ)似たものとなりました。しかし、第3章の内容は超オリジナルであり第1・2章のそれも先輩たちの研究とは一味違った独創的なものとなりましたのでその点を御批判・御評価頂きたく貴コンテストに応募するに至りました。宜しくお申し上げます。

第1章 花瓶の展開図出力のコンピュータによる自動化および花瓶にさす花づくり

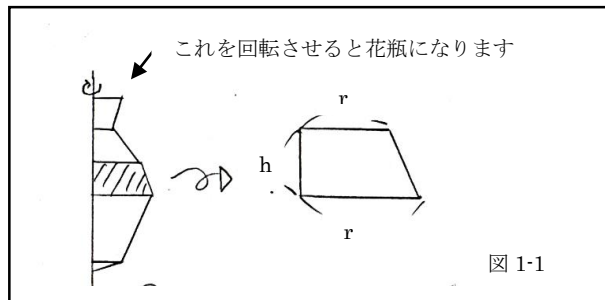
1. 動機

私は大石先生の授業で行った壺の製作(展開図の作成からは手動)により積極的にコンピュータを用いることで展開図づくりを自動化することを思いつきました。また、行列を用いて半円を回転させることにより(花瓶にさす)花を作成しました。

2. 花瓶の展開図出力のコンピュータによる自動化

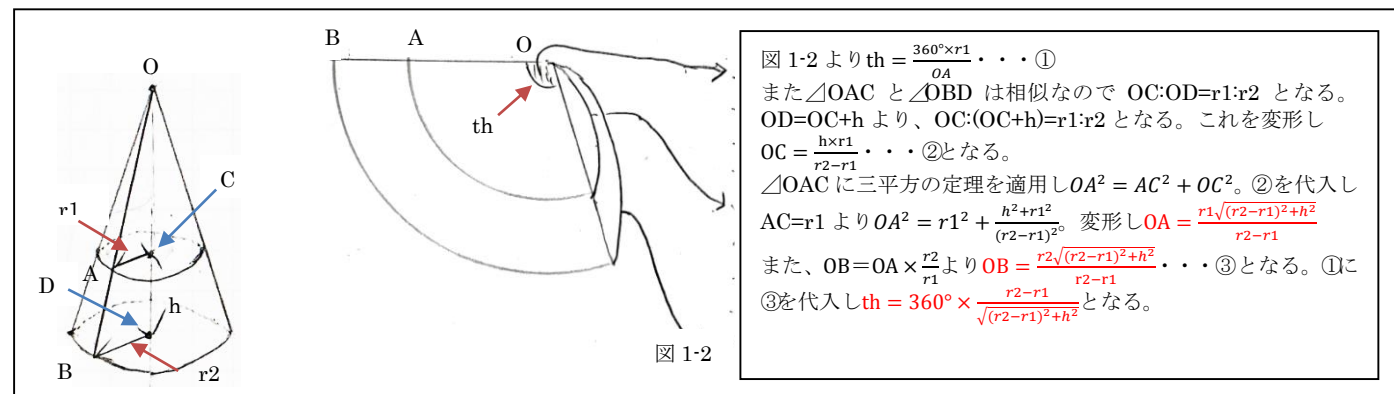
① 目標

作りたい花瓶の垂直な断面図(図1-1)を製作、そこから3つの値、この断面図の r_1 、 r_2 および、高さ h を測りプログラムに入力するだけで自動的に花瓶の展開図が出力されるようにすること。



② 展開図の解析

今回、私は花瓶を横向きに回転体の集合体としてモデル化しました。そのため花瓶の展開図は扇形となっています。扇形の解析は次のようになりました。



③ 展開図出力を自動化するプログラムの製作

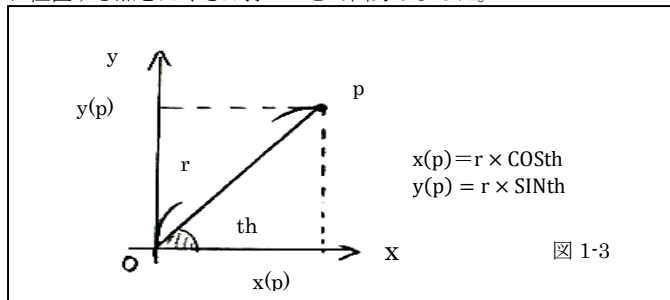
プログラムは十進 BASIC を用いて製作しました。その際、プログラムは次の3つの要素を含む必要があると考えました。

- ・プログラム利用者に r_1 、 r_2 、 h を入力してもらう要素。
- ・上の解析より r_1 、 r_2 、 h から OA 、 OB 、 th を計算する要素。
- ・中心角 th の円弧2つ、これら扇形を結ぶ線分2つを出力する要素。

第三の要素では②までとは異なる解析を必要としたのでこれを以下に説明します。

～中心角 th の円弧のプログラム～

円弧はある円の円周の一部です。今回は円のある1点から等距離 r に位置する点をたくさん打つことで出力しました。



円弧は円周の一部を切り取った形なので角度 th の変域を変えれば出力されます。BASICでは、角度はラジアン表記なので度数表記に変換する定数 $d(=3.14159/180)$ を挿入しました。また、2つの円弧は距離

r をそれぞれ OA 、 OB に変換し、角度 th はすでに計算によって定まっているので、 $TO th$ という形にして

```
FOR x1=0 TO th STEP 0.1
  PLOT POINTS:OA * COS(x1 * d),OA * SIN(x1 * d)
  PLOT POINTS:OB * COS(x1 * d),OB * SIN(x1 * d)
NEXT x1
```

となります。

～2つの扇形を結ぶ線分2つ、のプログラム～

2つの扇形の端の座標は、図3より
点A ; $(x,y)=(OA * \cos th, OA * \sin th)$
点B ; $(x,y)=(OB * \cos th, OB * \sin th)$
これを十進 BASIC で直線出力するには、線分1本当たり両端の座標を `PLOT POINTS:x1,y1;x2,y2` と入力すれば出力されます。

```
PLOT LINES:OA * COS(th * d),OA * SIN(th * d)
:OB * COS(th * d),OB * SIN(th * d)
PLOT LINES:OA,0;OB,0
```

となります。

～プログラムの利便化～

I. 展開図の平行移動

現在までのプログラムでは、円弧の中心となるある1点を原点(0,

0)としています。BASICにおいて原点の座標は出力画面の左上となっています。(図 1-4 矢印赤)

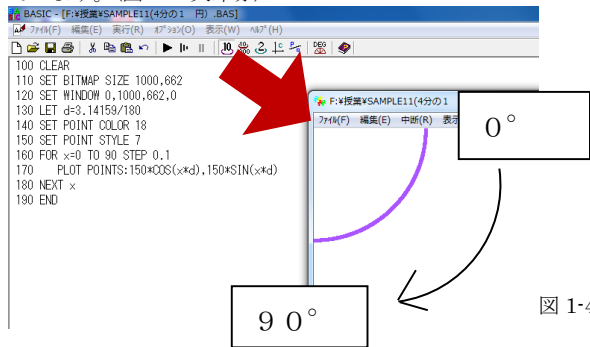


図 1-4

また BASICにおいて 0°、角度が増加する方向は上のようになっています。(矢印黒の向き)

そのため、角度 th の変域の幅が 90° 以上になる、または変域の上限が 90° 以上、下限が 0° 以下になると展開図が画面上から外れてしまいます。そこで円弧の中心座標を $x=a1$ 、 $y=b1$ とし、プログラムの最初にその値を定めるようにしました。そして前述した各プログラム(赤文字)は各行(xy)という形で出力する図形の座標を定めているので、x の最後に +a1 を、y の最後に +b1 を追加するように改変し、展開図の平行移動をできるようにしました。(下のプログラム 1-1 510~700 参照)

II. 糊代の追加

また、組み立てる際に展開図に糊代がある方がよいと考えました。糊代は展開図の内側と横に付けるようにし、プログラムを組みました。

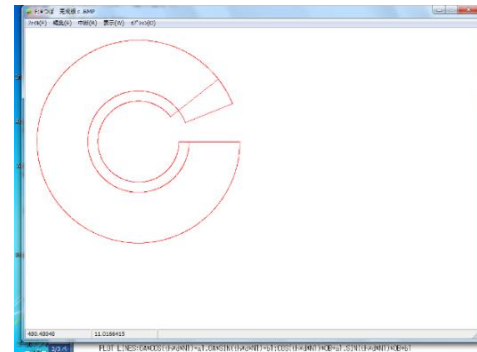


図 1-5

図 1-5 のように展開図の内側の糊代は元の円弧(直径が小さい方)を一定の割合 N1 を決めて縮小し、横側の糊代は元の円弧 2 つの角度を一定の割合 N2 を決めて増加させました。加えて、糊代部分を閉じるため線分を 1 本追加しました。(プログラム 1-1 450~660 行 参照)

III. その他

- ・さらに、 $r1=r2$ のとき②の式がゼロ除算となるため条件節を挿入しました。
- ・また $r1>r2$ のとき th、OA、OB の値が負の値となってしまうので、 $r3, r4$ という変数を作り、
 $r1>r2$ のとき $r3=r2, r4=r1$
 $r1<r2$ のとき $r3=r1, r4=r2$ としました。
 そして th、OA、OB を求めるプログラムの $r1$ を $r3$ に、 $r2$ を $r4$ に修正しました。(プログラム 1-1 240~410 参照)
- ・また、せっかくなので文様付きの花瓶を製作したいと思い、プログラムの最初に、花瓶に付けたい文様の画像を画面に呼び出す 1 文、
gload"F:(画像名).png" をはじめに挿入しました。

<プログラム 1-1>

```

100 CLEAR
110 gload"F:小橋口文様.png"
120 SET BITMAP SIZE 1000,662
130 SET WINDOW 0,1000,662,0
140 LET d=3.14159/180
150 SET POINT COLOR 1
160 SET LINE COLOR 1
170 SET POINT STYLE 1
180 LET a1=250
190 LET b1=250
200 LET N1=1.05
210 INPUT PROMPT "上底r1の値は":r1
220 INPUT PROMPT "上底r2の値は":r2
230 INPUT PROMPT "幅hの値は":h
240 IF r1=r2 THEN
250   LET L=2*r1*d*180
260   PRINT "Lの長さは":L
270   PLOT LINES:a1,b1;a1+L,b1
280   PLOT LINES:a1+L,b1;a1+L,b1+h
290   PLOT LINES:a1,b1;a1,b1+h
310 ELSE
320   IF r1>r2 THEN
330     LET r4=r1
340     LET r3=r2
350   ELSE
360     LET r3=r1
370     LET r4=r2
380   END IF
390   LET OA=r3*SQR((r4-r3)^2+h^2)/(r4-r3)
400   LET OB=r4*SQR((r4-r3)^2+h^2)/(r4-r3)
410   LET th=360*(r4-r3)/SQR((r4-r3)^2+h^2)
420   PRINT "半径OAの長さは":OA
430   PRINT "半径OBの長さは":OB
440   PRINT "中心角θの大きさは":th
450   IF r1>r2 THEN
460     LET OC=OA*0.8
470   ELSE
480     LET OC=OB*1.1
490   END IF
500   FOR x1=0 TO th STEP 0.1
510     PLOT
520     POINTS:OA*Cos(x1*d*N1)+a1,OA*Sin(x1*d*N1)+b1
530     PLOT POINTS:OC*Cos(x1*d)+a1,OC*Sin(x1*d)+b1
540     NEXT x1
550   IF h>0 THEN
560     LET x1=OC*Cos(th*d)+a1
570     LET y1=OC*Sin(th*d)+b1
580     LET x2=OB*Cos(th*d)+a1
590     LET y2=OB*Sin(th*d)+b1
600     PLOT LINES:x1,y1;x2,y2
610     PLOT
620     LINES:OC+a1,b1;OB+a1,b1
630     LET x1=OA*Cos(th*d*N1)+a1
640     LET y1=OA*Sin(th*d*N1)+b1
650     LET x2=OB*Cos(th*d*N1)+a1
660     LET y2=OB*Sin(th*d*N1)+b1
670     PLOT LINES:x1,y1;x2,y2
680     LET x1=OA*Cos(th*d)+a1
690     LET y1=OA*Sin(th*d)+b1
700     LET x2=OB*Cos(th*d)+a1
710     LET y2=OB*Sin(th*d)+b1
720     PLOT LINES:x1,y1;x2,y2
730   END IF
740 END IF
750 END

```

3. 花瓶にさす花づくり

①目標

行列による回転移動で花を作成する。

② 行列による回転移動

図 1-6 よりある 1 点 $P(x,y)$ を角度 th 回転移動させる場合を考えます。まず点 $R(x,0)$ 、 $Q(0,y)$ をとります。次に角 th 回転させた R' 、 Q' の座標は $R'(x\cos th, y\cos th)$ 、 $Q'(-x\sin th, y\cos th)$ となります。(左の図)そして右図より P' の座標は $x1=x\cos th - y\sin th$ 、 $y1=x\sin th + y\cos th$ となります。よって回転移動の式は右図より、

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos th & -\sin th \\ \sin th & \cos th \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
 となります。

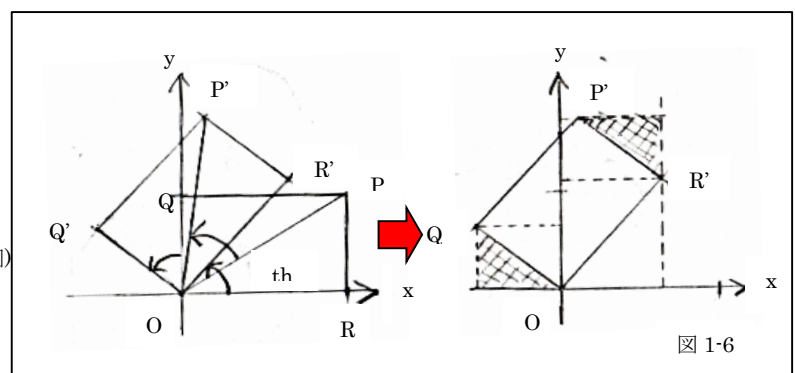


図 1-6

③ 花のプログラム

今回は半径 20 の半円を回転させることで花を作りました。半円を描くプログラムは右のようになります。
(プログラム 1-2) この半円を②の式でそのまま回転させると回転させた半円同士が重なり、結果として円が出力されてしまいます。そこで、回転の中心と半円の中心を異なる点にとりました。(その距離は 75)を移動させるようにしました。そのプログラムは次のようになります。

```
FOR th0=0 TO 360 STEP 30
  FOR th1=0 TO 180 STEP 0.1
    LET x=20*COS(th1*d)
    LET y=20*SIN(th1*d)
    PLOT POINTS:x*COS(th0*d)-y*SIN(th0*d)+200+75*COS(th0*d),x*SIN(th0*d)+y*COS(th0*d)+250+75*SIN(th0*d)
  NEXT th1
NEXT th0
```

```
FOR th=0 TO 180
STEP 0.1
  LET x=20*COS(th*d)
  LET y=20*SIN(th*d)
NEXT th
```

<プログラム 1-2>

しかし、このプログラムの実行結果は図 1-7A となり閉じた形にはなりません。これは半円の th1 の変域が $0^\circ \leq th1 \leq 180^\circ$ となっているためです。(図 1-7A の緑丸の中)

そこで、変域を $-90^\circ \leq th1 \leq 90^\circ$ にします。すると図 1-7B が出力され閉じた形(花の形)なります。(図 1-7B の緑丸の中) 以上を基に作成したプログラム(プログラム 1-3)とその実行結果(図 1-7C)をここに示しておきます。

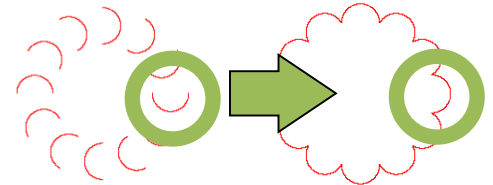


図 1-7A

図 1-7B

<プログラム 1-3>

```
100 CLEAR
110 SET BITMAP SIZE 1016,662
120 SET WINDOW 0,1000,652,0
130 LET d=3.14159/180
140 SET POINT STYLE 1
150 SET LINE COLOR 1
160 SET POINT COLOR 24
170 FOR th0=0 TO 360 STEP 30
180   FOR th1=-90 TO 90 STEP 0.1
190     LET x=20*COS(th1*d)
200     LET y=20*SIN(th1*d)
210     LET x1=x*COS(th0*d)-y*SIN(th0*d)+500+75*COS(th0*d)
220     LET y1=x*SIN(th0*d)+y*COS(th0*d)+250+75*SIN(th0*d)
230     PLOT POINTS:x1,y1
240   NEXT th1
250 NEXT th0
260 SET AREA COLOR 27
270 flood 500,250
280 FOR th0=0 TO 360 STEP 30
290   FOR th1=-90 TO 90 STEP 0.1
300     LET x=20*COS(th1*d)
310     LET y=20*SIN(th1*d)
320     LET x1=x*COS(th0*d)-y*SIN(th0*d)+500+50*COS((th0+10)*d)
330     LET y1=x*SIN(th0*d)+y*COS(th0*d)+250+50*SIN((th0+10)*d)
340     PLOT POINTS:x1,y1
350   NEXT th1
360 NEXT th0
370 SET AREA COLOR 6
380 flood 500,250
390 FOR th0=0 TO 360 STEP 0.1
400 PLOT POINTS:50*COS(th0*d)+500,50*SIN(th0*d)+250
410 NEXT th0
420 SET AREA COLOR 22
430 flood 500,250
440 FOR th0=0 TO 360 STEP 30
450   FOR th1=-90 TO 90 STEP 0.1
460     LET x=20*COS(th1*d)
470     LET y=20*SIN(th1*d)
480     LET x1=x*COS(th0*d)-y*SIN(th0*d)+500+25*COS((th0+20)*d)
490     LET y1=x*SIN(th0*d)+y*COS(th0*d)+250+25*SIN((th0+20)*d)
500     PLOT POINTS:x1,y1
510   NEXT th1
520 NEXT th0
530 END
```



図 1-7C

第2章 画像の湾曲化による花瓶の表面への画像の貼り付け

1 研究の動機と目的

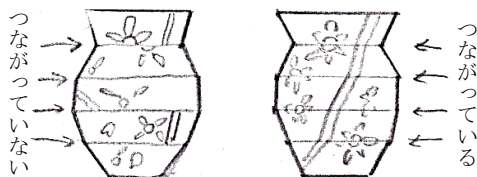


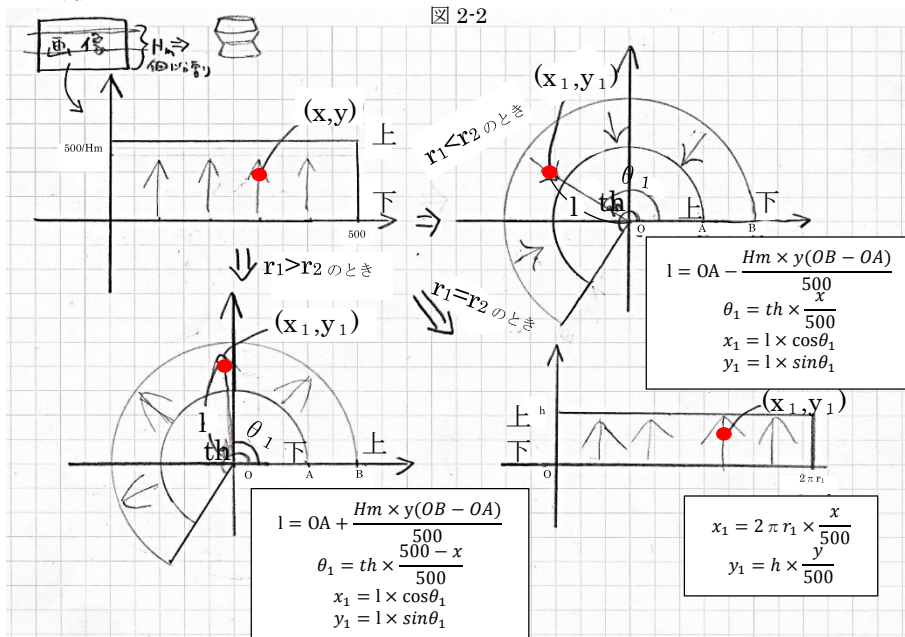
図 2-1

第1章では思い通りの形と模様の花瓶の展開図を作り出す方法を考えました。しかしこの方法だと円錐台の境目で模様が切れてしまい、模様の連続性がなくなってしまう。僕は画像を湾曲化させれば模様が切れることがなくなるのではないかと考えました。そして湾曲化させることで、図 2-1 の右の花瓶のように花瓶の曲面に絵を貼り付けることができるのではないかと考えたのです。

この章では画像を変形させ花瓶の曲面上でつなぐことを目的とします。

また展開図によって x 座標、y 座標の範囲がばらつくので、展開図の x 座標、y 座標の最大値、最小値をあらかじめ計算しておき、展開図が出力後の画像に入るように画像のトリミングをさせることにしました。

2 方法



② 画像のトリミング

OA 、 OB 、 th の値によっては展開図が描かれる座標が大きくなり、ウィンドウの座標の範囲を固定していると表示できる領域からはみ出すときがあります。そのため図 2-4、表 2-1 のように x_1 、 y_1 の最大値、最小値を求めてウィンドウ上に表示される座標をしぼります。

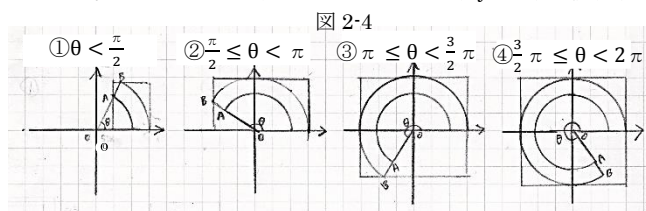


表 2-1

	x_1 の最大値	y_1 の最大値	x_1 の最小値	y_1 の最小値
①	OB	$OB \sin \theta$	$OA \cos \theta$	0
②	OB	OB	$OB \cos \theta$	0
③	OB	OB	$-OB$	$OB \sin \theta$
④	OB	OB	$-OB$	$-OB$

④ プログラムの内容

① と②を使ってプログラムを作成しました。プログラムは次のページに記載しています(プログラム 2-1)。

まずは円錐台の個数、半径、高さをそれぞれ変数 Hm 、配列 $haneki(Hm+1)$ 、配列 hs に代入します(1000~1240 行)。なお「DIM 文」は配列作る文です。最初にすべての花瓶の寸法を打ち込むのは、本プログラムでは画像を分割する必要があるからです。そして、第 1 章でも触れた「gload 文」を使い window 上に画像を表示し(1340 行)、二次元配列 $xy(500,500)$ に縦横 500 に区切った色指標を「ASK PIXEL VALUE 文」で代入します(1360~1420 行)。この時点で画像は 500×500 [px] で扱われます。そして上の円錐台から順番に展開図の出力を開始します(1430~2610 行名)。出力する円錐台の上底と下底に応じて配列 $haneki$ から r_1 (上底)、 r_2 (下底)を取り出し OA 、 OB 、 th を計算します。その際 r_2 よりも r_1 が大きいと OA 、 OB 、 th が負の値になってしまうので、 r_1 と r_2 の値を入れ替え、画像を上下反転させるかどうかを表す変数 $hanten$ に 1 を代入します。また r_1 と r_2 の値が等しいときは、展開図が長方形になるということを表す変数 rec に 1 を代入します (1450~1630 行)。 r_1 と r_2 の値がほとんど変わらないときなどは、展開図の座標が及ぶ範囲が広がってしまいます。そのため②で示したように、ウィンドウで表示する座標の範囲を、展開図がどこまで及ぶかの値に合わせて指定しています(1650~1940 行)。1960~2540 行で点(小円)をプロットしています。まずは配列 xy に入れた色情報 BASIC の色指標に変換します(1980~2360 行)。そして $rec=1$ ならば円筒の局面の展開図を、そうでなければ上で求めた数式を使って湾曲させたものを出力します。また $hanten=1$ ならば FOR 文で y が減少するように式を変形します(2370~2500 行)。上の色指標でプロットする点は、半径 1 [px] の小円を用います(2510~2520 行)。 x と y がそれぞれ 500 に達したら円錐台はウィンドウ上に出力されているので、画像ファイルとして出力します(2560~2600 行)。この作業を円錐台の個数分だけ行います(1960~2610 行)。すべての作業が終わったらプログラム終了(2620 行)。

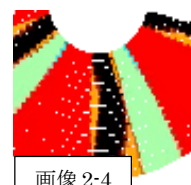
3 結果と考察

[画像 2-1]から[画像 2-2]のように展開図(bmp ファイル)が出力されました。その展開図をもとに作った花瓶が[画像 2-3]です。



4 結論・今後の課題

自作のプログラムを使い展開図を作り、花瓶に画像を貼り付けることができました。しかし、 AB が長くなると[画像 2-4]のように小円と小円の間の隙間が大きくなってしまいます。そのためプロットする小円の半径を中心からの距離に応じて大きくしようと考えました。しかし、弧方向では小円の中心からの距離によって小円の疎密が変わり、半径方向では AB の長さによって変わります。小円の半径を変えると弧方向・半径方向の両方の疎密が同時に変ってしまうので具合が悪いのです。現在は変形前の画像の 1 区切りごとに 1 つの点のみプロットしていますが、複数プロットすることによってこの問題を解決できると考えています。



```

1000 !'***** 花 瓶 の 情 報 入 力
*****
1010 LET Hm = 10 !' **Hm:花瓶
を何個の円錐台に分けるか?
1020 DIM hankei (Hm+1) !' **半径の配
列 (Hm+1 分)
1030 LET hankei (1)=70 !' **半径入力
(Hm+1 個分入力)
1040 LET hankei (2)=44.5
1050 LET hankei (3)=30
1060 LET hankei (4)=24
1070 LET hankei (5)=30
1080 LET hankei (6)=44.5
1090 LET hankei (7)=69.5
1100 LET hankei (8)=85
1110 LET hankei (9)=85
1120 LET hankei (10)=69.5
1130 LET hankei (11)=29.5
1140 DIM hs (Hm) !' **円錐台
の高さ
1150 LET hs (1)=21.5
1160 LET hs (2)=29.5
1170 LET hs (3)=29.5
1180 LET hs (4)=21.5
1190 LET hs (5)=21.5
1200 LET hs (6)=21.5
1210 LET hs (7)=21.5
1220 LET hs (8)=29.5
1230 LET hs (9)=29.5
1240 LET hs (10)=21.5
1250 LET bairitu=2.2
1260 FOR i=1 TO Hm+1 STEP 1 !' **
倍率設定
1270 LET kari_han=hankei (i)
1280 LET hankei (i)=kari_han*bairitu
1290 NEXT i
1300 FOR i=1 TO Hm STEP 1
1310 LET kari_hs=hs (i)
1320 LET hs (i)=kari_hs*bairitu
1330 NEXT i
1340 gload" 屋 の 学 校 ( 半 径 文
字) .png" !' **貼り付ける画像
1350 !' *****
1360 DIM xy (0 TO 500, 0 TO 500)
1370 SET COLOR MODE "NATIVE"
1380 FOR y=0 TO 1 STEP 1/500
1390 FOR x=0 TO 1 STEP 1/500
1400 ASK PIXEL VALUE (x, 1-y)
xy (x*500, y*500)
1410 NEXT x
1420 NEXT y
1430 FOR Wn=1 TO Hm STEP 1
1440 !' ***** r1, r2, h を取り出し
OA, OB, th, hanten, rec を 求 め る
*****
1450 LET r1 = hankei (Wn)
1460 LET r2 = hankei (Wn+1)
1470 LET h = hs (Wn)
1480 LET hanten = 0
1490 LET rec = 0
1500 IF r1>r2 THEN
1510 LET r3 = r1
1520 LET r1 = r2
1530 LET r2 = r3
1540 LET hanten = 1
1550 ELSEIF r1=r2 THEN
1560 LET rec = 1
1570 LET disksize = 1
1580 END IF
1590 IF rec = 0 THEN
1600 LET OA=r1*SQR ((r2-r1)^2+h^2)/(r2-
r1)
1610 LET OB=r2*SQR ((r2-r1)^2+h^2)/(r2-
r1)
1620 LET th=2*PI*(r2-r1)/SQR ((r2-
r1)^2+h^2)
1630 END IF
1640 !' *****
1650 !' **** 画像のトリミング*****
1660 IF rec = 0 THEN
1670 LET rightmax = OB
1680 IF th<(PI/2) THEN
1690 LET topmax = SIN (th)*OB
1700 LET leftmax = COS (th)*OA
1710 LET bottommax = 0
1720 ELSEIF th<PI THEN
1730 LET topmax = OB
1740 LET leftmax = COS (th)*OB
1750 LET bottommax = 0
1760 ELSEIF th<(3*PI/2) THEN
1770 LET topmax = OB
1780 LET leftmax = -OB
1790 LET bottommax = SIN (th)*OB
1800 ELSE
1810 LET topmax = OB
1820 LET leftmax = -OB
1830 LET bottommax = -OB
1840 END IF
1850 ELSE
1860 LET rightmax = r1*2*PI
1870 LET topmax = h
1880 LET leftmax = 0
1890 LET bottommax = 0
1900 END IF
1910 !' *****
1920 CLEAR
1930 SET bitmap SIZE rightmax-
leftmax+4, topmax-bottommax+4
1940 SET WINDOW leftmax-
2, rightmax+2, bottommax-2, topmax+2
1950 !' *****FOR 文 x, y
*****
1960 FOR y=500*(Wn-1)/Hm TO 500*Wn/Hm
STEP 1
1970 FOR x=0 TO 500 STEP 1
1980 DIM c$(0 TO 5)
1990 DIM cc (0 TO 5)
2000 !' -----
2010 !' -----
2020 LET c = xy (x, y)
2030 LET c1=c+16^6
2040 LET c1$=BSTR$(c1, 16)
2050 LET b5$=mid$(c1$, 2, 1)
2060 LET b4$=mid$(c1$, 3, 1)
2070 LET g3$=mid$(c1$, 4, 1)
2080 LET g2$=mid$(c1$, 5, 1)
2090 LET r1$=mid$(c1$, 6, 1)
2100 LET r0$=mid$(c1$, 7, 1)
2110 LET c$(5)=b5$
2120 LET c$(4)=b4$
2130 LET c$(3)=g3$
2140 LET c$(2)=g2$
2150 LET c$(1)=r1$
2160 LET c$(0)=r0$
2170 FOR m=5 TO 0 STEP -1
2180 IF c$(m)="A" THEN LET
c$(m)="10"
2190 IF c$(m)="B" THEN LET
c$(m)="11"
2200 IF c$(m)="C" THEN LET
c$(m)="12"
2210 IF c$(m)="D" THEN LET
c$(m)="13"
2220 IF c$(m)="E" THEN LET
c$(m)="14"
2230 IF c$(m)="F" THEN LET
c$(m)="15"
2240 NEXT m
2250 FOR n=5 TO 0 STEP -1
2260 LET cc (n)=VAL (c$(n))
2270 NEXT n
2280 LET
b=(16^1*cc (5)+16^0*cc (4))/256
2290 LET
g=(16^1*cc (3)+16^0*cc (2))/256
2300 LET
r=(16^1*cc (1)+16^0*cc (0))/256
2310 !' -----
2320 SET COLOR mode "REGULAR"
2330 !' -----
2340 SET COLOR MIX (255) r, g, b
2350 SET AREA COLOR 255
2360 !' -----
2370 IF rec =1 THEN
2380 LET x1=x*r1*2*PI/500
2390 LET y1=(500*Wn/Hm-
y)*h/(500/Hm)
2410 ELSE
2420 IF hanten = 1 THEN
2430 LET x1=COS (th*(500-
x)/500)*(OA+((OB-OA)*(-
y+500*Wn/Hm))/(500/Hm))
2440 LET y1=SIN (th*(500-
x)/500)*(OA+((OB-OA)*(-
y+500*Wn/Hm))/(500/Hm))
2450 ELSE
2460 LET
x1=COS (th*x/500)*(OA+((OB-OA)*(y-
500*(Wn-1)/Hm))/(500/Hm))
2470 LET
y1=SIN (th*x/500)*(OA+((OB-OA)*(y-
500*(Wn-1)/Hm))/(500/Hm))
2480 END IF
2490 END IF
2500 !' -----
2510 LET disksize =1
2520 DRAW disk WITH
SCALE(disksize)*SHIFT (x1, y1)
2530 NEXT x
2540 NEXT y
2550 !' *****
2560 DECLARE STRING filename$
2570 !' ***** 展 開 図 の 保 存 先
*****
2580 LET filename$ ="展開図出力先
/"&STR$(Wn)&". bmp"
2590 !' *****
2600 GSAVE filename$
2610 NEXT Wn
2620 END

```

第3章 縦切りの花瓶

1. 研究の動機と目的

第1章、第2章では花瓶（回転体）を横に切って開いた展開図を作りましたが、私はさらに、図3-1のように縦に切った場合の展開図はどのように作成できるのか考えることにしました。横切りのときは、各段の展開図をそれぞれ計算して作る手間がありました、縦切りなら全てのパーツが同じ形です。それが縦切りの良いところだと思います。

この研究では、花瓶を縦に切った場合の展開図をコンピュータで出力する方法を考えます。

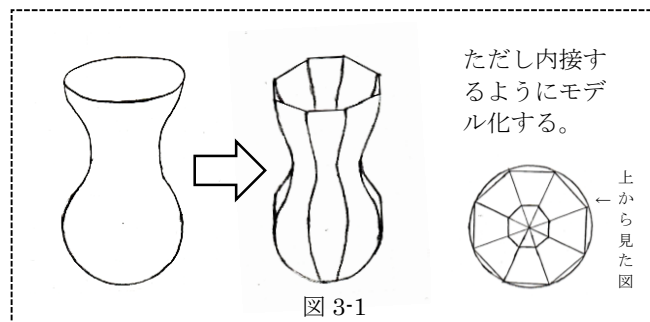


図3-1

2. 方法

十進 BASIC を使用し、展開図のプログラムを作成します。

まず、この花瓶を関数で表現します。

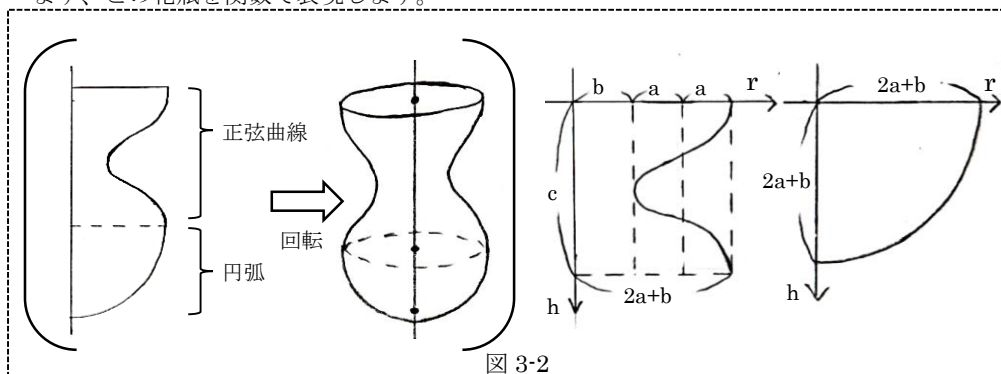


図3-2

図3-2のように h, r, a, b, c を設定すると(h は変数であることに注意してください)(r は図3-4の通り断面の半径)
(a は正弦曲線の振幅)
(b は花瓶の最も細くなる部分の半径)
(c は花瓶の正弦曲線の部分のみの高さ)
正弦曲線は
$$r = a \times \cos\left(\frac{2\pi}{c} \times h\right) + a + b \quad (0 \leq h \leq c)$$

円弧は
$$r = \sqrt{(2 \times a + b)^2 - h^2} \quad (0 \leq h \leq 2a + b)$$

とそれぞれ表せる。

以降、正弦曲線の部分を「上部」、円弧の部分を「下部」と呼びます。

次に図3-1のように花瓶を展開可能な立体にモデル化し分割します。元の滑らかな花瓶では水平な断面は円になりますが、その円に内接する正多角形を断面図とする図形にモデル化します。縦に分割された各パーツはその正多角形の一辺の集合体となります。

また、以下では展開図の枚数を n 枚として計算します。

各パーツをコンピュータで出力するには各パーツの幅と長さを求める必要があります。以下にその計算を示します。

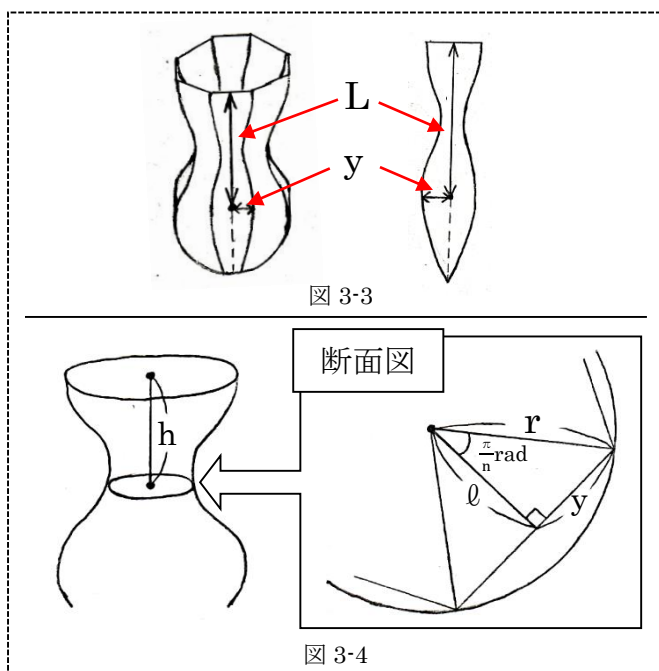


図3-3

図3-4

平な断面図の半径(図3-4にある通り、この半径を r としている)は次のように表せます。

$$\text{上部} \quad r = a \times \cos\left(\frac{2\pi}{c} \times h\right) + a + b$$

(正弦曲線の周期は c (c は半球を除いた高さ)なのでこの式になります。)

$$\text{下部} \quad r = \sqrt{(2 \times a + b)^2 - h^2} \quad (\text{円の式である。})$$

なので、次に展開図の幅 y は図3-4より、 $y = r \times \sin(\pi/n)$

$$\text{上部} \quad y = (a \times \cos\left(\frac{2\pi}{c} \times h\right) + a + b) \times \sin(\pi/n)$$

$$\text{下部} \quad y = \sqrt{(2 \times a + b)^2 - h^2} \times \sin(\pi/n)$$

と表せます。

② 長さ L

まず、長さを考える曲線は、 $\ell = f(h)$ (ℓ は図3-4参照)で表される曲線です。 $f(h)$ は具体的には、

$$f(h) = r \times \cos(\pi/n)$$

$$\text{上部} \quad f(h) = (a \times \cos\left(\frac{2\pi}{c} \times h\right) + a + b) \times \cos(\pi/n)$$

$$\text{下部} \quad f(h) = \sqrt{(2 \times a + b)^2 - h^2} \times \cos(\pi/n)$$

と表せます。

そして、この曲線の長さを微積分を用いて求めることを試みました。

曲線 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$)の長さ L は、

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

です。これを用いて上部を計算してみます。

まず微分の部分は、

$$\frac{d\ell}{dh}$$

$$= ((a \times \cos\left(\frac{2\pi}{c} \times h\right) + a + b) \times \cos(\pi/n))'$$

① 幅 y

図3-2にある通り、 h, a, b, c を用いて元の滑らかな花瓶の水

$$=\cos(\pi/n)(a \times \cos(\frac{2\pi}{c} \times h) + a + b)$$

$$=\cos(\pi/n) \times \frac{2\pi}{c} \times (-a \sin(\frac{2\pi}{c} \times h))$$

となります。

そして、

$$L = \int_0^h \sqrt{1 + (\cos(\pi/n) \times \frac{2\pi}{c} \times (-a \sin(\frac{2\pi}{c} \times h)))^2} dh$$

$$= \int_0^h \sqrt{1 + \cos^2(\pi/n) \times \frac{4\pi^2}{c^2} \times a^2 \times \sin^2(\frac{2\pi}{c} \times h)} dh$$

となるのですが、高校数学の範囲ではこの積分を計算することができませんでした。

なので次に、曲線を区切って直線の集まりと見て長さを求める方法を考えました。

③ 区切って長さを求める

このプログラムでは、既に求めた①幅の式も使用します。また、今まで L とおいていた展開図の長さの部分、ここからは sum とおきます。

まず上部について説明します。はじめは $sum=0$ です。そして、 $sum, y(h=0$ のときの y) に点を打ちます。次に、図 3-5 の $sum1$ の長さを求め、 sum に加算します。 h の間隔は $c/100000$ としています。そうしてまた

$sum, y(h=\frac{1}{100000}c$ のときの y) に点を打ちます。

以下、それを繰り返して展開図を描きます。

これをプログラムにするためには、

FOR NEXT 文の中に

```
LET sum=sum+SQR((c/100000)^2 + (f(h+c/100000)
-f(h))^2)
```

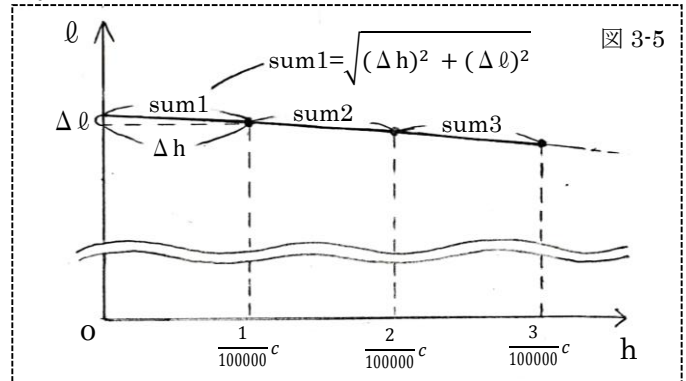
($f(h)=0$ である。)

という代入の文を入れたプログラムにします。

(0 は前に示したように変数 h の式です。そして $SQR(\sim)$ の部分が三平方の定理を利用して $sum1, sum2, \dots$ を求めています。)

ただし、FOR NEXT 文の h の範囲を単に $0 \sim c$ (半球を除いた高さ) にすると最後の繰り返しで sum に関係する部分が余分に計算されてしまい、 sum にズレが生じます。そこで、 h の範囲を $0 \sim (c - c/100000)$ とし、最後の $h=c$ の時の点は改めて別のプログラムで打つようにすることでこの問題を解決しました。(プログラム 3-1 の 1120 行, 1190 行, 1200 行など)

また、花瓶の下部についても同様にプログラムを作成します。下部については上記のような sum に関する余分な計算が行われると、円の式で負の数の平方根を計算してしまうことが分かったので、上部と同じようにプログラムを修正しました。



出来上がったプログラムを以下に示します。

```
1000 CLEAR
1010 SET BITMAP SIZE 1016,662
1020 SET WINDOW 0,1000,652,0
1030 LET d=3.14159
1040 SET POINT COLOR 1
1050 SET POINT STYLE 1
1060 INPUT PROMPT "振幅 a の値は":a
1070 INPUT PROMPT "最も細いところの半径 b の値は":b
1080 INPUT PROMPT "底部の半球を除いた高さ c の値は":c
1090 INPUT PROMPT "展開図の枚数 n の値は":n

1100 LET st=c/100000
1110 LET sum=0
1120 FOR h=0 TO c-st STEP st
1130 LET y=(a*COS(h/c*(2*d))+a+b)*SIN(d/n)
1140 PLOT POINTS:sum+100,y+200
1150 LET l2=(a*COS((h+st)/c*(2*d))+a+b)*COS(d/n)
1160 LET l1=(a*COS(h/c*(2*d))+a+b)*COS(d/n)
1170 LET sum=sum+SQR((st)^2+(l2-l1)^2)
1180 NEXT h
1190 LET y=(a*COS(h/c*(2*d))+a+b)*SIN(d/n)
1200 PLOT POINTS:sum+100,y+200

1210 LET st=(2*a+b)/100000
1220 FOR h=0 TO 2*a+b-st STEP st
1230 LET y=SQR((2*a+b)^2-(h)^2)*SIN(d/n)
1240 PLOT POINTS:sum+100,y+200
1250 LET l2=SQR((2*a+b)^2-(h+st)^2)*COS(d/n)
1260 LET l1=SQR((2*a+b)^2-(h)^2)*COS(d/n)
1270 LET sum=sum+SQR((st)^2+(l2-l1)^2)
1280 NEXT h
```

```
1290 LET y=SQR((2*a+b)^2-(h)^2)*SIN(d/n)
1300 PLOT POINTS:sum+100,y+200

1310 LET sum=0
1320 LET st=c/100000
1330 FOR h=0 TO c-st STEP st
1340 LET y=(a*COS(h/c*(2*d))+a+b)*SIN(d/n)
1350 PLOT POINTS:sum+100,y+200
1360 LET l2=(a*COS((h+st)/c*(2*d))+a+b)*COS(d/n)
1370 LET l1=(a*COS(h/c*(2*d))+a+b)*COS(d/n)
1380 LET sum=sum+SQR((st)^2+(l2-l1)^2)
1390 NEXT h
1400 LET y=(a*COS(h/c*(2*d))+a+b)*SIN(d/n)
1410 PLOT POINTS:sum+100,y+200

1420 LET st=(2*a+b)/100000
1430 FOR h=0 TO 2*a+b-st STEP st
1440 LET y=SQR((2*a+b)^2-(h)^2)*SIN(d/n)
1450 PLOT POINTS:sum+100,y+200
1460 LET l2=SQR((2*a+b)^2-(h+st)^2)*COS(d/n)
1470 LET l1=SQR((2*a+b)^2-(h)^2)*COS(d/n)
1480 LET sum=sum+SQR((st)^2+(l2-l1)^2)
1490 NEXT h

1500 LET y=SQR((2*a+b)^2-(h)^2)*SIN(d/n)
1510 PLOT POINTS:sum+100,y+200

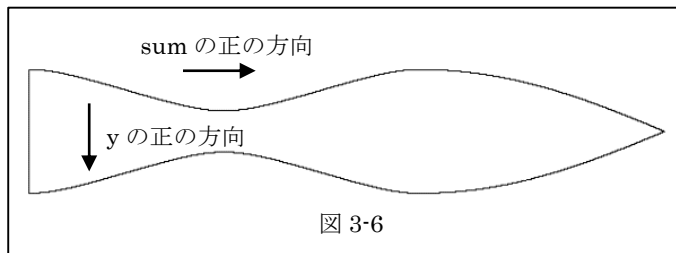
1520 LET y=(2*a+b)*SIN(d/n)
1530 PLOT LINES:100,y+200;100,y+200

1540 END
```

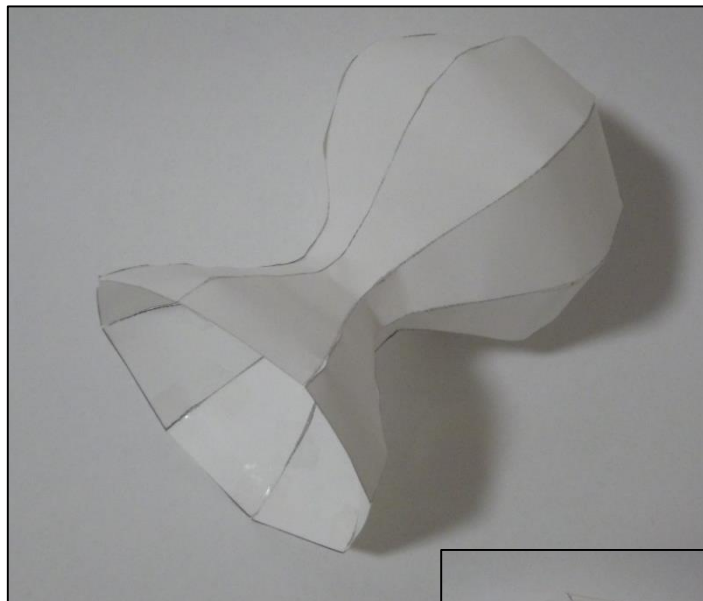
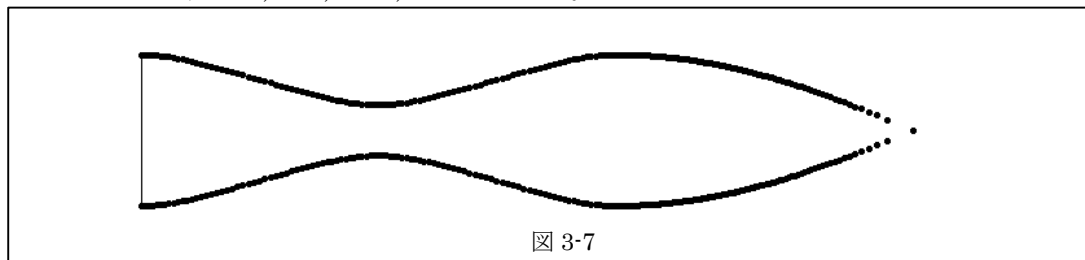
<プログラム 3-1>

3. 結果

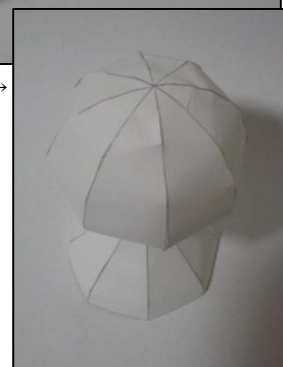
このプログラムを、例えば $a=50, b=50, c=300, n=8$ で実行すると、図 3-6 の展開図が表示され、それを 8 枚用意し切り取って組み立てると画像 3-1、3-2 のように花瓶ができあがります。



また、ステップ実行という機能(プログラムの各段階において、各変数の値を知ることができる。)を使うことによって、展開図の最底部にあたる点について、 $h=2 \times a + b(2 \times a + b)$ は下部のみでの高さなので、 h の下部における最終の値となる。)のときの sum の値と、 $y=0$ で点が打てているということがきちんと表示され、想定通りの値で最底部の点が打てていることが確認できました。点を打つ間隔を広くするとそのことがよくわかるので、その図も以下に掲載します。(図 3-7) ($st=c/100$ にして、 $a=50, b=50, c=300, n=8$ で実行した。)



画像 3-2(底の様子)→



第 4 章 結論

今回の研究では回転体を展開可能な立体にモデル化し、その展開図をコンピュータで出力することと、その立体に合わせて画像を曲げることに成功しました。また、今回の研究からあらゆる曲面を展開可能な立体にモデル化することや、さらにその立体に合わせて画像を曲げて貼り付けることができるようになるのではないかと予想されます。

第 5 章 感想

今回の研究のメンバーは三人とも元から数学が好きではありましたが、今回の研究で数学やコンピュータに対する見方がさらに変化したように思います。

プログラムを作成する中では、想定と違うものが出力されることがよくありました。その度に「どこかが違う。一体どこが間違っているんだ。」と私たちは苦しみました。しかし一から論理を見直せば間違いに気づくことができました。そうして今回私たちは、数学は落ち着いて論理的に考えることが基本ながら大切なのだと思いました。また、そうして問題が解決したときには、大きな達成感があることを知り、数学や論理的問題に取り組むことをさらに楽しいと思えるようになりました。

数学において答えはひとつです。しかし数学にどのように取り組むか、ということは人それぞれだと思います。数学は苦しい部分もありますが、取り組めば取り組むほど新たな見方ができるようになります。それが、数学を“使う”ということの醍醐味ではないかと思いました。

