# 数　学

## $\boxed{1}$

(1) $\displaystyle\int_a^{a+2} |x-|x-1||\,dx$ が最小となる $a$ の値は $\boxed{ア}$ である。

(2) $3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27=0$ の解は $x=\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$ である。 ただし, $\boxed{イ}<\boxed{ウ}$ とする。

(3) 点 $(5,2)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を $C_1$ とする。また, 点 $(0,7)$ を中心とし, 円 $C_1$ と外接する円を $C_2$ とする。さらに, 点 $(0,7)$ を中心とし, 円 $C_1$ と内接する円を $C_3$ とする。このとき, 円 $C_2$ の半径は $\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$ であり, 円 $C_3$ の半径は $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である。

(4) さいころ 3 個を同時に投げるとき, 出る目の和が 8 である確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ であり, 9 である確率は $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセソ}}$ である。

(5) 複素数 $z$ を 2 次方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解とするとき, $z^2+\dfrac{1}{z^2}=\boxed{タ}$, $z^3+\dfrac{1}{z^3}=\boxed{チ}$ である。また, $z^{12}=\boxed{ツ}$ である。

## 2

$f(x)=2x^3+ax^2+10x+b$ が $(x-c)^2$ で割り切れるような整数の組 $(a,b,c)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の $x=c$ 以外の解を $x=p$ とすると,

$$a=-\boxed{\text{ア}}c-\boxed{\text{イ}}p$$
$$5=c^2+\boxed{\text{ウ}}cp$$
$$b=-\boxed{\text{エ}}c^2p$$

である。

(2) 整数の組 $(a,b,c)$ は, $c$ の値が大きい順にそれぞれ

$$(a,b,c)=\left(\boxed{\text{オカキ}},\boxed{\text{クケコ}},\boxed{\text{サ}}\right),$$
$$\left(\boxed{\text{シス}},\boxed{\text{セソ}},\boxed{\text{タ}}\right),$$
$$\left(\boxed{\text{チ}},\boxed{\text{ツ}},\boxed{\text{テト}}\right),$$
$$\left(\boxed{\text{ナニ}},\boxed{\text{ヌネノハ}},\boxed{\text{ヒフ}}\right)$$

である。

$\boxed{\mathbf{3}}$

> **数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者**のみ, $\boxed{\mathbf{3}}$ と $\boxed{\mathbf{4}}$ の代わりに, $\boxed{\text{記述 }\mathbf{3}}$ と $\boxed{\text{記述 }\mathbf{4}}$ を解答してもよい。

$a, b, c, d, e, f$ を実数の定数とする。関数

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

が, 次の性質を満たすものとする。

- $P(-x) = -P(x)$ が常に成り立つ
- $P(-1) = 53$
- 導関数 $P'(x)$ は $x = \pm\sqrt{2}$ で最小値 $-225$ をとる

以下の問いに答えよ。

(1) $b = \boxed{\text{ア}}$, $d = \boxed{\text{イ}}$ であり, $P(0) = f = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $P'(x) = \boxed{\text{エ}}\, a\left(x^2 - \boxed{\text{オ}}\right)^2 - \boxed{\text{カキク}}$ である。 したがって,

$a = \boxed{\text{ケコ}}$, $c = \boxed{\text{サシス}}$, $e = \boxed{\text{セソ}}$ である。

(3) $P'(x)$ は $x^2 = \dfrac{\boxed{\text{タ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ で 0 になる。さらに,

$$2\left(\boxed{\text{タ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{チツ}}}\right) = \left(\sqrt{\boxed{\text{ト}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\right)^2$$

となるから, $x = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$, $-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ で

$P'(x) = 0$ になる。ただし, $\boxed{\text{ト}} > \boxed{\text{ナ}}$ とする。

## $\boxed{4}$

$\boxed{\text{数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者のみ, } \boxed{3} \text{ と } \boxed{4} \text{ の代わりに, } \boxed{\text{記述 3}} \text{ と } \boxed{\text{記述 4}} \text{ を解答してもよい。}}$

実数 $a, b$ に対して, $\max(a, b)$ は $a$ と $b$ のうち小さくない方を意味するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $1 + \max(a, b) = \max\left(\boxed{ア} + a,\ \boxed{ア} + b\right)$ であり,

$3x + 1 + \max(-3x + 1, x) = \max\left(\boxed{イ}x + \boxed{ウ},\ \boxed{エ}\right)$ である。

(2) $a$ を実数とし, $f(x) = \max(x, 0) - \max(x - a, 0)$ とする。$f(x) \leqq 0$ が常に成り立つための必要十分条件は $a \leqq \boxed{オ}$ である。
また, $0 \leqq f(x) \leqq 2$ が常に成り立つための必要十分条件は
$\boxed{カ} \leqq a \leqq \boxed{キ}$ である。

(3) $b$ を $b \geqq 1$ を満たす実数とし, $g(x) = \max\left(x^3, 0\right) - \max\left(x^3 - b^3, 0\right)$, $h(x) = g(x) - g(x - 1)$ とする。

$x \leqq 0$ では $h(x) = \boxed{ク}$ であり, $0 \leqq x \leqq 1$ では $h(x) = x^{\boxed{ケ}}$ であり, $1 \leqq x \leqq b$ では $h(x) = \boxed{コ}x^2 - \boxed{サ}x + \boxed{シ}$ である。また, $b \leqq x \leqq b + 1$ では $h(x) = b^3 - x^3 + \boxed{ス}x^2 - \boxed{セ}x + \boxed{ソ}$ であり, $b + 1 \leqq x$ では $h(x) = \boxed{タ}$ である。したがって, $h(x)$ の最大値は

$$\boxed{チ}b^{\boxed{ツ}} - \boxed{テ}b + \boxed{ト}$$

である。

また, $b = 3$ であるとき, 座標平面において $x$ 軸と $y = h(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積は $\boxed{ナニ}$ である。

$\boxed{記述 3}$

$\boxed{\text{\underline{数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者}のみ, } \boxed{\mathbf{3}} \text{ と } \boxed{\mathbf{4}} \text{ の代わりに, } \boxed{記述 \mathbf{3}} \text{ と } \boxed{記述 \mathbf{4}} \text{ を解答してもよい。}}$

$a, b, c$ を実数とし, $a \neq 0$ とする。2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ が $x = 2$ で最大値 1 をとるとする。さらに, 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは $x$ 軸と異なる 2 点で交わり, この 2 つの交点を A, B とすると, 線分 AB の長さが 2 であるとする。このとき, $a, b, c$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{記述 }\mathbf{4}}$

数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者のみ, $\boxed{\mathbf{3}}$ と $\boxed{\mathbf{4}}$ の代わりに, $\boxed{\text{記述 }\mathbf{3}}$ と $\boxed{\text{記述 }\mathbf{4}}$ を解答してもよい。

あるゲームに勝つ確率を $p$, 負ける確率を $q$, 引き分ける確率を $r$ とする。ただし, $p+q+r=1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) このゲームを 4 回行い, 2 回勝ち, 1 回負け, 1 回引き分ける確率を $p$ と $q$ を用いて表せ。

(2) $p=q$ とする。このゲームを 4 回行い, 1 回勝ち, 3 回引き分ける確率が最大となるような $p$ の値を求めよ。

(3) $\theta$ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし, $p = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$, $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$ とする。このとき, 引き分ける確率 $r$ を $\theta$ の関数として $f(\theta)$ とおく。$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $y=f(\theta)$ のグラフの概形をかけ。