数　学

$\boxed{1}$

(1) k は0でない定数とする。x の2次関数 $y = kx^2 + 4kx + k^2 - 5k - 10$ の最小値が 0 であるとき, k の値は $\boxed{アイ}$ である。また, 最大値が 0 であるとき, k の値は $\boxed{ウエ}$ である。

(2) $\triangle$ABC において, AB $= 10$, AC $= 9$, $\angle$ABC $= 60^\circ$ とすると, BC $= \boxed{オ} + \sqrt{\boxed{カ}}$ または BC $= \boxed{キ} - \sqrt{\boxed{ク}}$ である。

(3) 連立方程式 $3x + y + |y| = 2,\ 2x + y - |2x - y| = -1$ の解は $x = \dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$, $y = \dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$ または $x = \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$, $y = \dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$ である。ただし, $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}} < \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ を満たすものとする。

(4) $x \fallingdotseq 2$ とする。不等式 $\log_2 \left| \dfrac{x}{2} - 1 \right| < -2 + \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{2}$ の解は $\boxed{ト} < x < \boxed{ナ}$, $\boxed{ナ} < x < \boxed{ニ}$, $\boxed{ニ} < x < \boxed{ヌ} + \sqrt{\boxed{ネ}}$ である。

(5) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{-2a_n + 1}$ で定める。$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと, $b_1 = \boxed{ノ}$ であり, $b_{n+1} = b_n - \boxed{ハ}$ である。したがって, $a_n = \dfrac{1}{\boxed{ヒフ}n + \boxed{ヘ}}$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$

平面上に原点 O を中心とした半径 1 の円を考える。この円上に $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$ を満たすような 3 点 A, B, C をとる。ただし定数 t を 0 以上の実数とする。また, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \boxed{\text{ア}}$ である。また, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{t^2 - \boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。$|\cos\theta| \leqq 1$ だから, $\boxed{\text{カ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{キ}}$

でなければならないことがわかる。

(2) $t = \boxed{\text{カ}}$ のとき $\boxed{\boxed{\text{ク}}}$, $t = \boxed{\text{キ}}$ のとき $\boxed{\boxed{\text{ケ}}}$ を満たす。ただし, $\boxed{\boxed{\text{ク}}}$ と $\boxed{\boxed{\text{ケ}}}$ に当てはまるものは, 次の⓪〜③のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　① $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

② $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　③ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(3) 定数 t は, $\boxed{\text{カ}} < t < \boxed{\text{キ}}$ とし, $\triangle$OAB の面積を S とすると,

$$S^2 = \frac{1}{\boxed{\text{コサシ}}}\left(-t^{\boxed{\text{ス}}} + \boxed{\text{セソ}}\,t^2 - \boxed{\text{タチ}}\right)$$

となり, $t = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}$ のとき面積 S は最大となる。このとき

$\cos\theta = \boxed{\text{ト}}$ である。

$\boxed{\mathbf{3}}$

数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者のみ, $\boxed{\mathbf{3}}$ と $\boxed{\mathbf{4}}$ の代わりに, $\boxed{\text{記述 }\mathbf{3}}$ と $\boxed{\text{記述 }\mathbf{4}}$ を解答してもよい。

a を定数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a - 1$$

と定める。$y = f(x)$ のグラフを C とする。以下の問いに答えよ。

(1) グラフ C は $a = \boxed{\text{ア}}$ であるとき x 軸と接し, $a \neq \boxed{\text{ア}}$ であるとき, x 軸と 2 点 $\left(\boxed{\text{イ}},\ 0\right)$, $\left(\boxed{\text{ウ}}a - \boxed{\text{エ}},\ 0\right)$ で交わる。

(2) $\boxed{\text{ア}} < a$ とする。グラフ C と x 軸で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

$$S(a) = \int_{\boxed{\text{イ}}}^{\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}} \left(-x^{\boxed{\text{オ}}} + \boxed{\text{カ}}ax - \boxed{\text{キ}}a + \boxed{\text{ク}}\right)dx$$

$$= \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\left(a - \boxed{\text{サ}}\right)^{\boxed{\text{シ}}}$$

(3) 原点を O とし, グラフ C の頂点を P とする。線分 OP の長さは $\sqrt{a^{\boxed{\text{ス}}} + \left(a - \boxed{\text{セ}}\right)^{\boxed{\text{ソ}}}}$ で, a が $\boxed{\text{ア}} \leqq a \leqq 3$ を満たしながら動くとき, 線分 OP が通過する領域の面積は, $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

$\boxed{\textbf{4}}$

数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者のみ, $\boxed{\textbf{3}}$ と $\boxed{\textbf{4}}$ の代わりに, $\boxed{\text{記述}\,\textbf{3}}$ と $\boxed{\text{記述}\,\textbf{4}}$ を解答してもよい。

ある会社は A さん, B さん, C さん, $\cdots$, J さんの 10 人で構成されている。この会社で社長, 副社長, 部長の役職を 1 人ずつ決めることとなった。ただし, 同じ人が 2 つ以上の役職に就かないこととする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 10 名を 3 つの役職に割り当てる場合の数は $\boxed{\textbf{アイウ}}$ 通りである。

(2) 次の条件を考える。

条件 1 A さんと B さんは役職に同時に選ばれない。

条件 2 C さんは社長以外では役職を受けない。

条件 1 を満たすように 10 名を 3 つの役職に割り当てる場合の数は $\boxed{\textbf{エオカ}}$ 通りである。**条件 1** および**条件 2** を満たすように 10 名を 3 つの役職に割り当てるとき, C さんが社長となる場合の数は $\boxed{\textbf{キク}}$ 通りであり, C さんが社長とならない場合の数は $\boxed{\textbf{ケコサ}}$ 通りである。したがって, **条件 1** および**条件 2** を満たすように 10 名を 3 つの役職に割り当てる場合の数は $\boxed{\textbf{シスセ}}$ 通りである。

$\boxed{\text{記述}\ \mathbf{3}}$

<u>数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者</u>のみ, $\boxed{\mathbf{3}}$ と $\boxed{\mathbf{4}}$ の代わりに, $\boxed{\text{記述}\ \mathbf{3}}$ と $\boxed{\text{記述}\ \mathbf{4}}$ を解答してもよい。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ において, $y = 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta$, $x = \sin\theta + \cos\theta$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) y を x の整式で表せ。

(3) (2) の整式を $f(x)$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(4) y のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{記述 4}$ $\boxed{\underline{\textbf{数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者}}のみ, \boxed{\mathbf{3}} と \boxed{\mathbf{4}} の代わりに, \boxed{記述 \mathbf{3}} と \boxed{記述 \mathbf{4}} を解答してもよい。}$

p, q を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) p が素数であるとは, p が $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ 以外に約数をもたない $\boxed{\text{ウ}}$ 以上の整数であることである。

また, p と q が互いに素であるとは, p と q の最大公約数が $\boxed{\text{エ}}$ であることである。

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数, 記号あるいは語句を解答せよ。

(2) $p(p+1)$ は偶数であることを証明せよ。

(3) $\sqrt{p}$ が有理数であれば, 互いに素な正の整数 m, n を用いて $\sqrt{p} = \dfrac{m}{n}$ と表せる。この事実を利用して, p が素数であるとき $\sqrt{p}$ は有理数ではないことを, 背理法を用いて証明せよ。