数　学

$\boxed{1}$

(1) 全体集合 U を自然数全体の集合とし, U の部分集合 A, B, C が,

$$A = \{\, x \mid 1 \leqq x \leqq 10\}$$
$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 2 \text{ の倍数}\,\}$$
$$C = \{\, x \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\,\}$$

であるとき, $A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = \left\{\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}\right\}$ である。 ただし, $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 2 つの不等式 $x^2 - 3x - 4 < 0$ および $x^2 - x - 6 < 0$ をともに満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{エオ}} < x < \boxed{\text{カ}}$ である。

(3) 赤玉 2 個と白玉 3 個が入った袋から, 3 個の玉を同時に取り出すとき, 取り出す赤玉の個数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。ただし, どの玉が取り出せるかは同様に確からしいとする。

(4) i を虚数単位とし, $z = 2 + i$ とすると, $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} + \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}i$ となり, $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}} + \dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}i$ となる。

(5) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = (1, 2, 4)$ と $\overrightarrow{b} = (1, -4, -2)$ の両方に垂直で大きさが 1 であるベクトルは $\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\left(1, \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}, \dfrac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\right)$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$

点 P が円 $x^2 + y^2 = 12$ の上を動くとき, 点 A$(4, 0)$ と点 P を結ぶ線分 AP の中点 Q(a, b) について, 以下の問いに答えよ。

(1) Q の座標 (a, b) の満たす条件を求めると,

$$\left(a - \boxed{\text{ア}}\right)^2 + b^2 = \boxed{\text{イ}}$$

となる。したがって, 点 Q の軌跡は, 点 $\left(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ の円である。

(2) 原点と点 Q の距離を L とすると, 点 Q の座標の満たす条件より,

$$L^2 = \boxed{\text{カ}}\,a - \boxed{\text{キ}}$$

となる。ここで, 点 Q の x 座標 a のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ク}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{コ}} + \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

なので, L^2 の最大値は $\boxed{\text{シ}} + \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ であり,

最小値は $\boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である。

3

数理工学科が志望学科 1 である受験者のみ, **3** と **4** の代わりに, **数理 3** と **数理 4** を解答してもよい。

a を正の定数とする。$y = x^2$ が定める放物線を C_1 とする。また, 中心を点 $\mathrm{P}(a, 0)$ とする円 C_2 は放物線 C_1 と点 $\mathrm{Q}(b, b^2)$ を共有し, 点 Q における C_1 と C_2 の接線が一致するとする。以下の問いに答えよ。

ただし, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものは, 次の⓪〜⑦のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ b	① $\dfrac{1}{b}$	② b^2	③ $\dfrac{1}{b^2}$
④ x	⑤ $\dfrac{1}{x}$	⑥ x^2	⑦ $\dfrac{1}{x^2}$

(1) 点 Q を通る放物線 C_1 の接線の傾きは $\boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}}$ である。この接線は点 Q で C_2 とも接するから, 直線 PQ の傾きは $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}\boxed{\text{カ}}$ である。このことから, $a = \boxed{\text{キ}}\,b^{\boxed{\text{ク}}} + b$ とわかる。

(2) $f(x) = \boxed{\text{キ}}\,x^{\boxed{\text{ク}}} + x - a$ とおく。$f(x)$ は微分すると $f'(x) = \boxed{\text{ケ}}\boxed{\text{コ}} + 1$ となる。方程式 $f'(x) = 0$ の実数解の個数は $\boxed{\text{サ}}$ 個だから, 方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数は $\boxed{\text{シ}}$ 個とわかる。

(3) 直線 PQ と放物線 C_1 の点 Q でない交点を R とおく。点 R の x 座標を c とするとき, $c = m\boxed{\text{ス}} + n\boxed{\text{セ}}$, $m = \boxed{\text{ソタ}}$, $n = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。ただし, $m < n$ とする。この c は, $b = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のとき最大値 $-\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ をとる。

$\boxed{\mathbf{4}}$

> **数理工学科が志望学科 1 である受験者**のみ, $\boxed{\mathbf{3}}$ と $\boxed{\mathbf{4}}$ の代わりに, $\boxed{数理\ \mathbf{3}}$ と $\boxed{数理\ \mathbf{4}}$ を解答してもよい。

座標平面上の原点 O$(0,0)$ および点 A$(1,0)$, 点 B$(0,1)$ を頂点とする $\triangle$OAB を考える。辺 AB 上の点 P_1, P_2, 辺 OA 上の点 Q_1, Q_2, 辺 OB 上の点 R_1, R_2 が, それぞれ,

$$\angle\mathrm{AOP}_1 = \angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = \angle\mathrm{P}_2\mathrm{OB} = 30^\circ$$
$$\angle\mathrm{OBQ}_1 = \angle\mathrm{Q}_1\mathrm{BQ}_2 = \angle\mathrm{Q}_2\mathrm{BA} = 15^\circ$$
$$\angle\mathrm{OAR}_1 = \angle\mathrm{R}_1\mathrm{AR}_2 = \angle\mathrm{R}_2\mathrm{AB} = 15^\circ$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) $t = \tan 15^\circ$ とおくと, $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$ であるから,

$t^2 + \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,t - 1 = 0$ が成り立つ。したがって, $t = \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。また, $\tan 75^\circ = \boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2) 原点 O と点 P_1 を通る直線の方程式は $y = \dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}x$, 点 A と点 R_1 を通る直線の方程式は $y = \left(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}\right)\left(x - \boxed{\text{サ}}\right)$ であり, この 2 つの直線の交点 D の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}} - \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}, \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}} - \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$ である。

同様に, 原点 O と点 P_2 を通る直線と点 B と点 Q_1 を通る直線の交点 E の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}, \dfrac{\boxed{\text{ナ}} - \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)$ である。

さらに, 点 A と点 R_2 を通る直線と点 B と点 Q_2 を通る直線の交点 F の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}} - \boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}, \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}} - \boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\right)$ である。

以上から, $\mathrm{DE}^2 = \mathrm{EF}^2 = \mathrm{FD}^2 = \dfrac{\boxed{\text{ヒ}} - \boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ であるので, $\triangle$DEF は正三角形である。

数理 3 　**数理工学科が志望学科 1 である受験者**のみ, **3** と **4** の代わりに, 数理 **3** と 数理 **4** を解答してもよい。

e を自然対数の底, log を自然対数, a, b, d を実数とする。$y = e^x$ のグラフを x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動したグラフを C_1 とし, C_1 と直線 $y = x$ に関して対称なグラフを C_2 とする。また, $y = x + d$ の表す直線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

ただし, ア, イ に当てはまるものは, 次の⓪〜⑦のうちから,

⓪ $e^{x+a} + b$　① $e^{x-a} + b$　② $e^{x+a} - b$　③ $e^{x-a} - b$
④ $\log(x+b)+a$　⑤ $\log(x-b)+a$　⑥ $\log(x+b)-a$　⑦ $\log(x-b)-a$

ウ, エ, オ, サ に当てはまるものは, 次の⓪〜⑦のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 0　① 1　② a　③ $d-1$
④ $a+d$　⑤ $a+d-1$　⑥ e^a　⑦ e^{-a}

(1) C_1 は $y =$ ア, C_2 は $y =$ イ のグラフである。

(2) グラフ C_1 が直線 ℓ に接するとき, その接点 P の座標は
(ウ, エ) であり, $b =$ オ である。

(3) $b =$ オ とする。

$$S(a) = \int_{\boxed{カ}}^{\boxed{ウ}} \left\{ \boxed{ア} - (x+d) \right\} dx$$

とすると, $a > 0$ のとき, $S(a)$ はグラフ C_1, 直線 ℓ および y 軸によって囲まれた部分の面積となる。また,

$$S(a) = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} a^{\boxed{ケ}} - a + \boxed{コ} - \boxed{サ}$$

である。

さらに, $S(0) =$ シ であり,

$$\lim_{a \to 0} \frac{S(a) - S(0)}{a} = \boxed{ス}$$

である。

数理 4 数理工学科が志望学科 1 である受験者のみ, **3** と **4** の代わりに, **数理 3** と **数理 4** を解答してもよい。

数列 $\{a_n\}$ は次の条件によって定められるものとする。

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $a_3 = \boxed{\text{アイ}}$ である。また, $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n$ であり,

$$A = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad B = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。これより, $a_5 = \boxed{\text{クケコ}}$ である。

(2)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5\left\{\boxed{\text{サ}}\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)^n + \boxed{\text{セ}}\right\}}{5\left(\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)^n + \boxed{\text{チ}}}$$

なので,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \boxed{\text{ツ}}$$

である。

(3) $a_n > 100000$ となる最小の n は $\boxed{\text{テ}}$ である。
なお, 必要であれば, $\log_{10} 5 = 0.699$, $\log_{10} 3 = 0.477$ を用いよ。