行列の最適な並び方とは？

武蔵野大学　友枝 明保

1　研究の要約

行列において，最後尾の人が最も早く行列の先頭の位置に到達するような最適な並び方を調べるために，行列の中を人が歩く状況を数理モデルによって記述し，数理モデルの解析から，最適な並び方が存在することを明らかにした．参考文献に記載されている具体的な数値を代入することで，行列内での並び方は前の人と 0.62m 空けて並べばよいことがわかった．

2　研究の動機と目的

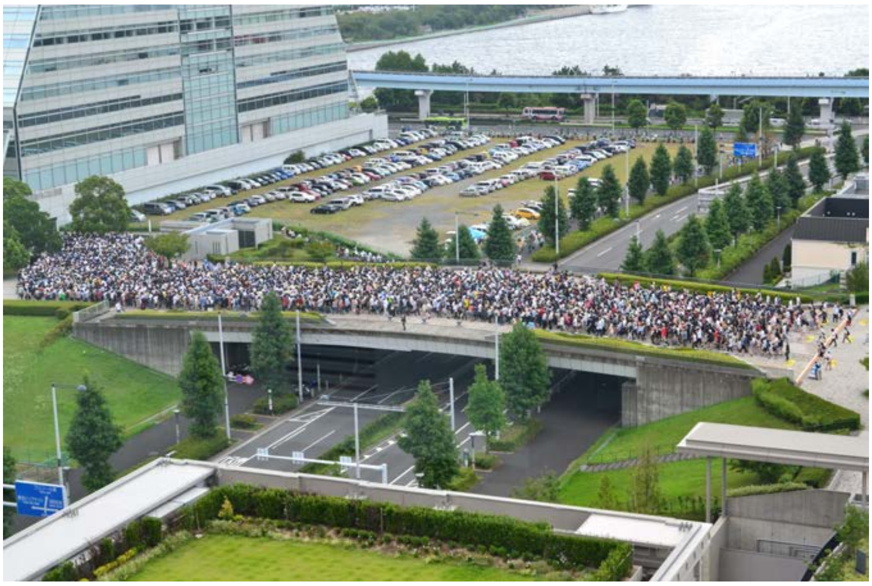

図 1: コミックマーケット 86 の会場へ入場していく人の行列

2014 年 8 月 15 日から 17 日にかけて，東京の有明にある東京ビッグサイトでコミックマーケット 86 が開催された．コミックマーケットとは世界最大の同人誌即売会で

あり，三日間で 50 万人以上の人が集まる．このような人気のある大きなイベントでは，開場時間になって会場に入場しようと思っても，すぐには入場することができず，図 1 のような長い行列に並び，行列の先頭から順番に入場していくこととなる．このような長い行列に並んでいると，行列の先頭が動き始めても自分自身はまだ動き始めることができないでいることに気付く．動き始めても最初はゆっくり歩いていて，スムーズに動くことができるまでには少し時間がかかる．なぜ全員が一斉に，かつ，スムーズに動き始めることができないのであろうか？ これは直前の人が動いたことに気付いて自分も動き始めるが，動き始めるまでに時間のロスが生じてしまうことや，動き始めても人が詰まっていてスムーズに動けないことに原因があると考えられる．なるべく早く入場するためには，行列を短くしたくなるが，人が詰まるとスムーズに動くことができなくなってしまい，帰って遅くなることが予想される．一方で，人が詰まらないようにスペースを空けると，行列が長くなり，スムーズに動けたとしても後方の人にとっては歩く距離が長くなってしまい，到達するまでの時間が長くなってしまうと考えられる．それでは，どれくらいのスペースを空けて行列に並べば，最も早く会場に入場することができるのであろうか？

そこで，ここでは単純化して，一次元の行列における次のような問題を考える．

問題

先頭の人が動き始めたのち，行列の最後尾に並んでいる人が，行列の先頭の位置に最も早く到達するような行列の並び方はどういうものか？

3　方法：計算式（数理モデル）の構築

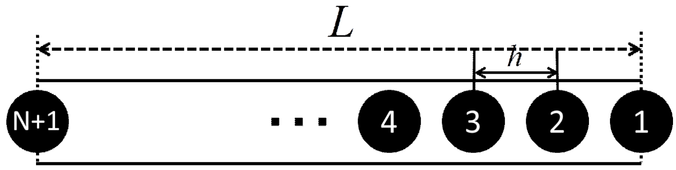

図 2: 人の行列の模式図．各黒丸が人を表し，円の中の数字は人の番号 $(1, 2, 3 \cdots, N+1)$ を表す．番号の小さい方が行列の先頭側とする．

行列に $N+1$(人) 並んでいるものとする．そのときの行列の長さを L(m) とすると，平均的な人と人との距離 h(m) は

$$h = \frac{L}{N} \tag{1}$$

で表される（図 2）．

次に，歩く速度を考える．h が大きいときはスペースがあるので通常の歩行速度に近い速度で歩くことができる．一方，h が小さいときは混んでいて，歩く速度は遅くなると考えられる．つまり，歩く速度の関数は人と人との距離 h に依存して決まり，次の二つの条件を満たさなければならない．

1. h が無限大で通常時の歩行速度 $V_{\mathrm{max}}(\mathrm{m/sec})$ に漸近する．

2. h がある値 $h = h_0 > 0$ で速度がゼロになる（立ち止まる）．

この二つの条件を満たす関数として，歩く速度 $v(h)(\mathrm{m/sec})$ は次のような関数で表されると仮定する．

$$v(h) = \begin{cases} 0 & (0 \leq h < h_0) \\ V_{\mathrm{max}}(1 - \frac{h_0}{h}) & (h_0 \leq h). \end{cases} \tag{2}$$

実際，(2) で表される関数 $v(h)$ は図 3 のようになる．

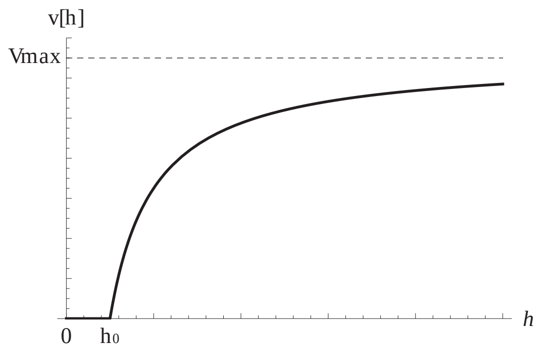

図 3: (2) で表される人同士の距離 h と歩行速度 $v(h)$ の関係を表したグラフ（実線）．破線は (2) の $h \to \infty$ の漸近線を表す．

さらに，最後尾の人が行列の中を歩いていく様子を考える（図 4）．先頭が動き始めた時，最後尾の人はまだ混雑した行列の中（灰色領域）にいるので，ゆっくりと歩いていく．そのとき，黒色の矢印で表されたスムーズに動く人とゆっくり歩く人の境界面を考えると，その境界面は，行列の先頭から徐々に後方に動いていくこととなる．ここでは，その速度を $\tau(\mathrm{m/sec})$ とする．最後尾の人は，この境界面と出会ったのちは，V_{max} でスムーズに歩くこととなる．つまり，最後尾の人の歩き方は，速度 τ で近づいてくる境界面と出会うまで（行列の内部で混雑している領域内）はゆっくり $v(h)$ で歩き，境界面と出会ったのち（スムーズに歩ける領域内）は，V_{max} で歩くこととなる．以上のことから，最後尾の人が先頭の位置に到達する時間 $T(\mathrm{sec})$ は，

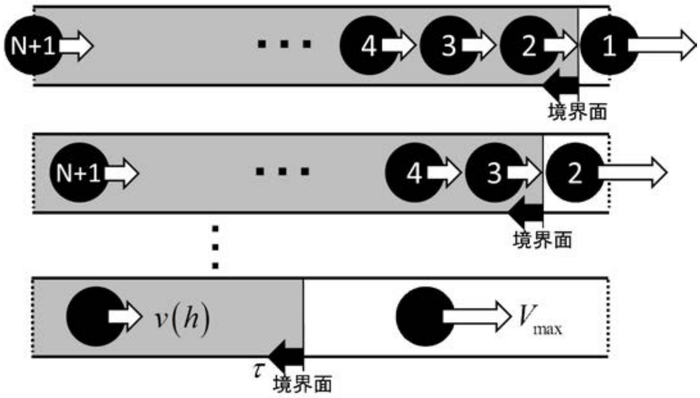

図 4: 行列の中を人が動いていく様子．白い矢印は歩行速度を表す．長い白矢印はスムーズな歩行速度 $V_{\max}$ を表し，短い白矢印は，混雑した行列内部の歩行速度 $v(h)$ を表す．灰色領域と白色領域は，それぞれ混雑している行列の内部とスムーズに歩くことのできる場所を表す．これらの二つの領域の境界面の移動方向を黒い矢印で表し，その速度を τ とする．

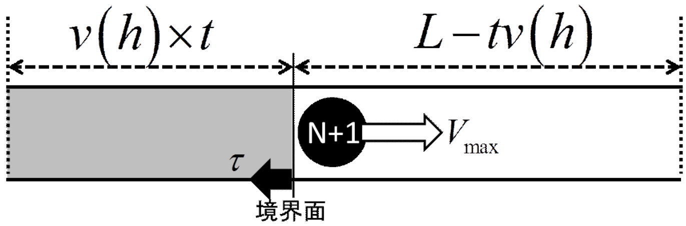

図 5: 時間 t をかけて境界面まで移動し，その後 $V_{\max}$ で移動する様子．左の灰色領域は混雑した行列の内部で，右の白色領域はスムーズに動くことができる．

混んでいる中をゆっくりと歩く時間 t(sec) とスムーズな速度で先頭の位置まで歩くのにかかる時間の和として表すことができ，

$$T(h) = t + \frac{L - v(h)t}{V_{\max}} \tag{3}$$

となる．右辺第 2 項は，時間 t だけ混んでいる行列の中を歩いたのちの，スムーズな速度 $V_{\max}$ で歩いた時間を意味している（図 5）．

ここで，境界面と出会うまでの時間 t は

$$t = \frac{L}{v(h) + \tau} \tag{4}$$

と表すことができるので，(1)，(2)，(4) の関係を (3) に代入すると，最後尾の人が

先頭の位置に到達するまでの時間 T は最終的に h を変数として，

$$T(h) = \frac{L}{V_{\max}} + \Big(1 - \frac{v(h)}{V_{\max}}\Big)t \tag{5}$$

$$= \frac{Nh}{V_{\max}} + \frac{Nh_0}{V_{\max}(1 - \frac{h_0}{h}) + \tau} \tag{6}$$

となる．これが本稿での計算式（数理モデル）である．

4　数理モデルの解析結果と考察

数理モデル解析を行うにあたり，変数 h 以外の値を決定する．[1] より，通常の歩行速度を 80(m/min) とすると，これは秒速に直すと約 1.3(m/sec) となるため，ここでは $V_{\max} = 1.3$ とする．次に，$v(h_0) = 0$ となる立ち止まってしまう距離 h_0 は，人の肩幅が [2] より男性で 45cm 程度，女性で 40cm 程度であることから，空間を考慮して $h_0 = 0.5$m と考える．これらの値を (2) に代入すると

$$v(h) = \begin{cases} 0 & (0 \leq h < 0.5) \\ 1.3\Big(1 - \frac{0.5}{h}\Big) & (0.5 \leq h). \end{cases} \tag{7}$$

となり，グラフは図 6 となる．

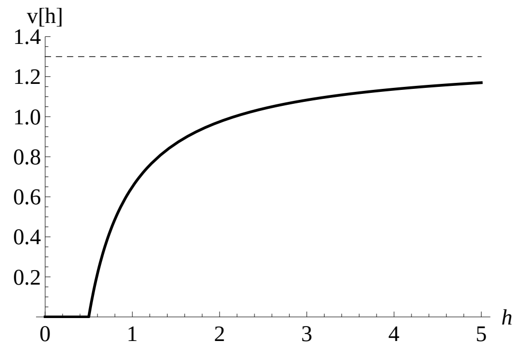

図 6: (7) で表される歩行速度 $v(h)$ のグラフ（実線）．破線は (7) の $h \to \infty$ の漸近線を表す．

さらに [3] より，人の運動開始位置の時間変化（境界面の移動速度）は約 0.8m/sec とあるので，ここでは，$\tau = 0.8$m/sec とする．行列の人数を $N = 400$ 人とし，これらの値を (6) に代入すると

$$T(h) = \frac{400h}{1.3} + \frac{400}{1.3(2 - \frac{1}{h}) + 1.6} \tag{8}$$

となる．今知りたいことは，$T(h)$ が最小となる h の値であるので，(8) を微分して極値を求める．$T(h)$ を h について微分すると，

$$T'(h) = \frac{400}{1.3} - \frac{400 \times \frac{1.3}{h^2}}{\left(4.2 - \frac{1.3}{h}\right)^2} \tag{9}$$

となるので，$T'(h) = 0$ となる h を求めると，

$$\begin{aligned}
& T'(h) = 0 && (10)\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{400}{1.3} = \frac{400 \times \frac{1.3}{h^2}}{\left(4.2 - \frac{1.3}{h}\right)^2} && (11)\\
\Longleftrightarrow\ & \left(4.2 - \frac{1.3}{h}\right)^2 = \left(\frac{1.3}{h}\right)^2 && (12)\\
\Longleftrightarrow\ & h = \frac{2.6}{4.2} \sim 0.62(m) && (13)
\end{aligned}$$

となる．実際，(8) のグラフを書くと図 7 のようになり，極値が存在することがわかる．以上のことから，最後尾の人が先頭の位置に最も早く到達する並び方として，前の人と体の大きさを含めて 0.62m 空けて並ぶことが最も良いことがわかった．

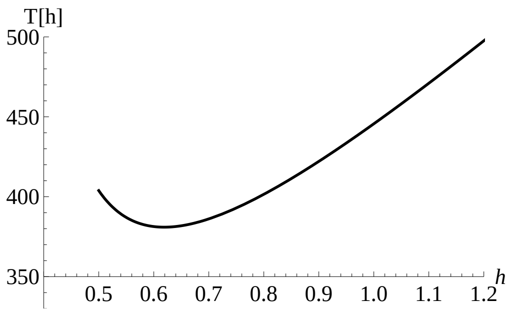

図 7: 最後尾の人が先頭の位置に到達する時間 $T(h)$ のグラフ.

さらに，一般的に考えるために，(6) をそのまま変数 h について微分すると，極値を与える h は，$h = 0$ を除くと

$$h = \frac{2h_0 V_{\max}}{V_{\max} + \tau} \tag{14}$$

で与えられる．前頁の理由から $h_0 = 0.5$ とすれば，

$$h = \frac{V_{\max}}{V_{\max} + \tau} \tag{15}$$

となり，$T(h) = 0$ を実現する h はスムーズなときの移動速度と，境界面の伝播速度によって決まることもわかった．

5　結論と今後の課題

本稿では，最後尾の人が最も早く先頭の位置に到達することのできる行列の並び方について，所要時間 T に関する計算式を，人同士の距離 h を変数として表し，その極値を求めることで，$T(h)$ が最小となる距離 h を求めた．具体的な数値を与えることで，体の大きさも含めて前の人と 0.62m 空けて並ぶことが，最適な行列の並び方であることを示した．さらに，本稿では数理モデルを用いた解析を行ったため，混雑している状況で歩く人の速度（$v(h)$ の関数形），スムーズな状況で歩く歩行速度（$V_{\max}$），境界面の伝播速度（τ）を具体的に測定することができれば，どのような行列に対しても最適な並び方を求めることができることが明らかとなった．

今後の課題としては次の点が挙げられる．具体的な数値を与える際に，文献より値を引用して，境界面の移動速度 τ を 0.8m/sec として与えたが，これは，様々な間隔で並んでいる行列における平均的な境界面の移動速度と考えられる．境界面の移動速度は並んでいる間隔 h にも影響を受けると思われるので，並んでいる間隔 h に依存して変化する移動速度 $\tau(h)$ へと拡張した数理モデルでの解析を行う必要があると考えている．

参考文献

1. wikipedia 「徒歩所要時間」より．
2. http://paro2day.blog122.fc2.com/blog-entry-399.html
3. http://www.engineering-eye.com/rpt/c007_shockwave/01_02.html