2022年度

一般選抜Ａ日程
【2/6】

数学Ⅰ・Ⅱ・Ａ・Ｂ
（数列・ベクトル）

※数理工学科のみ
数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・Ａ・Ｂ

［60　分］

$\boxed{1}$

(1) $\triangle$ABC について，$\angle$B は直角であるとする。AB $= 3$, BC $= 4$ とする。$\angle$B の二等分線と辺 AC の交点を D とする。三角形の面積について，

$$\triangle \mathrm{ABD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\ \sin\ \boxed{\text{アイ}}^\circ$$
$$\triangle \mathrm{DBC} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD}\ \sin\ \boxed{\text{ウエ}}^\circ$$
$$\triangle \mathrm{ABC} = \boxed{\text{オ}}$$

であるから，BD $= \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(2) 等式 $(3k-1)x + (4k-1)y - (25k-7) = 0$ が，k のどのような値に対しても成り立つとき，$x = \boxed{\text{コ}}$, $y = \boxed{\text{サ}}$ である。

(3) 変量 x について，

(x のデータの分散)
$\quad = (x^2$のデータの平均値$) - (x$ のデータの平均値$)^2$

となることが知られている。

10 個の数がある。そのうちの 6 個の平均値は 4，分散は 7 であり，残り 4 個の平均値は 9，分散は 2 である。このとき，全体の平均値は $\boxed{\text{シ}}$ で，全体の分散は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

(4) a は正の定数とする。関数 $y = x^2 - 6x + 3$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値は，

$0 < a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ のとき，$\boxed{\text{タ}}$ であり，

$\boxed{\text{ソ}} < a$ のとき，$a^2 - \boxed{\text{チ}}\,a + \boxed{\text{ツ}}$ である。

(5)

$$\left(\sqrt[4]{4}\right)^{20} \times \left(\sqrt{16}\right)^{22} = 2^{\boxed{\text{テト}}}$$

である。

2

以下では, $a=180$ とし, n は自然数とする。

(1) a を素因数分解すると $a=2^{\boxed{\text{ア}}}\cdot 3^{\boxed{\text{イ}}}\cdot\boxed{\text{ウ}}$ である。

a の正の約数の個数は $\boxed{\text{エオ}}$ 個である。

(2) $\sqrt{an}$ が自然数となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{カ}}$ である。$\sqrt{an}$ が自然数となるとき, n はある自然数 k により, $n=\boxed{\text{キ}}k^2$ と表される数であり, そのときの $\sqrt{an}$ の値は $\boxed{\text{クケ}}k$ である。

(3) 自然数 k により $\boxed{\text{クケ}}k$ と表される数で, 7 で割った余りが 1 となる最小の k を求める。1 次不定方程式 $\boxed{\text{クケ}}k-7\ell=1$ を解くと, $k>0$ となる整数解 (k,ℓ) のうち k が最小のものは, $k=\boxed{\text{コ}}$, $\ell=\boxed{\text{サシ}}$ である。また, $\sqrt{an}$ が 7 で割ると 1 余る自然数となるとき, そのような自然数 n のなかで最小のものは $\boxed{\text{スセ}}$ である。

3 数理工学科が第１志望である受験者のみ，$\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の代わりに，$\boxed{\text{数理 3}}$ と $\boxed{\text{数理 4}}$ を解答してもよい。

$f(x)=\dfrac{1}{8}|x|^3$ とする。曲線 $y=f(x)$ に点 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{14}{15},-\dfrac{3}{5}\right)$ から引いた２つの接線を以下の手順で求めよ。

(1) $a \leqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ の点 $(a,f(a))$ における接線の方程式は，

$$y=-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a^2x+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}a^3$$

となる。接線が点Pを通るとき，a は

$$a^3+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^2+\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}=0$$

を満たす。したがって，$a=-\boxed{\text{コ}}$ であり，接線の方程式は，

$$y=-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x-\boxed{\text{ス}}$$

である。

(2) $b>0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ の点 $(b,f(b))$ における接線の方程式は，

$$y=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}b^2x-\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}b^3$$

となる。接線が点Pを通るとき，b は

$$b^3+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}b^2-\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}=0$$

を満たす。したがって，$b=\boxed{\text{ヌ}}$ であり，接線の方程式は，

$$y=\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}x-\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。

$\boxed{4}$

数理工学科が第1志望である受験者のみ, $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の代わりに, $\boxed{数理3}$ と $\boxed{数理4}$ を解答してもよい。

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が,

$$a_1 = 0,\ b_1 = 1$$
$$a_{n+1} = -2a_n - 4b_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$b_{n+1} = -2a_n + 5b_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められている。以下の問いに答えよ。

(1) $b_n = -\dfrac{1}{\boxed{ア}}a_{n+1} - \dfrac{1}{\boxed{イ}}a_n$ であり, これと $b_{n+1} = -2a_n + 5b_n$ より, $a_{n+2} - \boxed{ウ}\,a_{n+1} - \boxed{エオ}\,a_n = 0$ を得る。

(2) 定数 α, β が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

を満たすとする。このとき,

$$(\alpha, \beta) = \left(\boxed{カ},\ -\boxed{キ}\right) \text{ または } (\alpha, \beta) = \left(-\boxed{ク},\ \boxed{ケ}\right)$$

である。数列 $\left\{a_{n+1} - \boxed{カ}\,a_n\right\}$ は,

初項が $\boxed{コサ}$, 公比が $-\boxed{シ}$ の等比数列

であり, 一般項は

$$a_{n+1} - \boxed{カ}\,a_n = \boxed{スセ} \cdot \left(-\boxed{ソ}\right)^{n-1}$$

となる。数列 $\left\{a_{n+1} + \boxed{ク}\,a_n\right\}$ は,

初項が $\boxed{タチ}$, 公比が $\boxed{ツ}$ の等比数列

であり, 一般項は

$$a_{n+1} + \boxed{ク}\,a_n = \boxed{テト} \cdot \boxed{ナ}^{\,n-1}$$

となる。したがって,

$$a_n = \frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}\left\{\boxed{ノ}^{\,n-1} - \left(-\boxed{ハ}\right)^{n-1}\right\}$$

である。

$\boxed{\text{数理 3}}$ 数理工学科が第 1 志望である受験者のみ, $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の代わりに, $\boxed{\text{数理 3}}$ と $\boxed{\text{数理 4}}$ を解答してもよい。

関数 $f(x)=\left||\sin x|-\dfrac{1}{2}\right|$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ を考える。

(1) $f(x)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。$f(x)$ が最大値をとる x を, 値の小さい方から順にならべると, $\boxed{\text{ウ}}$, $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$, π, $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$, $\boxed{\text{ク}}\,\pi$ である。

(2) $f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。$f(x)$ が最小値をとる x を, 値の小さい方から順にならべると, $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$, $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$, $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$, $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$ である。

(3) 曲線 $y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と x 軸, および 2 直線 $x=0$, $x=2\pi$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 V は,

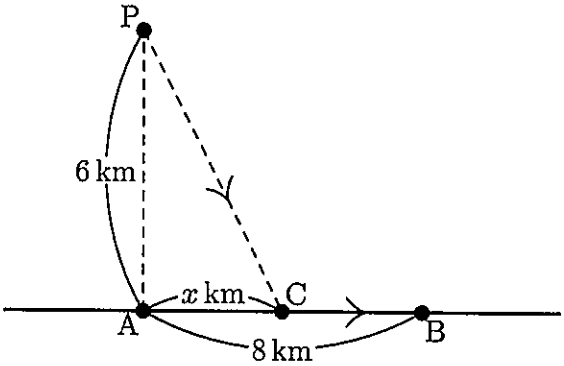
$$V=\boxed{\text{テ}}\,\pi\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx$$

を満たすので,

$$V=\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi^2-\boxed{\text{ニ}}\,\pi$$

である。

$\boxed{\text{数理 4}}$ 数理工学科が第１志望である受験者のみ，$\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の代わりに，$\boxed{\text{数理 3}}$ と $\boxed{\text{数理 4}}$ を解答してもよい。



ボートに乗った人がＰ点にいる。Ｐ点はまっすぐな海岸の最近点Ａより６ km 沖にある。Ａ点から海岸に沿って８ km 離れた点をＢ点とする。Ｐ点から，Ｂ点に向かってまっすぐボートで進むか，Ａ点とＢ点の間のＣ点に向かってまっすぐボートで進み，Ｃ点からはボートを降りてＢ点に向かって歩くとする。ボートの進む速さを時速２ km，海岸に到着したのち海岸に沿って歩く速さを時速 v km$(v > 2)$ とする。Ｐ点を出発してＢ点に到達するまでに要する最短の時間を求める。ここで，ボートから降りる時間は無視できるとする。Ａ点とＣ点までの距離を x km $(0 \leqq x \leqq 8)$ とし，Ｐ点を出発してＢ点に到達するまでに t 時間かかるとすると，

$$t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{アイ}} + x^2}}{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{\boxed{\text{エ}} - x}{v}$$

となる。ここで，t を x で微分すると，

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}} + x^2}} - \frac{\boxed{\text{ク}}}{v}$$

となる。$0 \leqq x \leqq 8$ において $\dfrac{dt}{dx}$ が０となるとき，$v \geqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。Ｐ点を出発してＢ点に到達するまでに要する最短の時間は，$\boxed{\text{サ}} < v \leqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のとき，$\boxed{\text{シ}}$ 時間となり，$v > \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のとき，$\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{v^2 - \boxed{\text{セ}}} + \boxed{\text{ソ}}}{v}$ 時間となる。