I期（一般）

**令和５年度**

**武蔵野大学大学院 工学研究科 数理工学専攻 入学試験問題**
**（専門に関する筆記試験）**

問題１から問題４のすべての問題に解答せよ．解答用紙は問題ごとに１枚とし，それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと．

## 問題1

2次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$, $(0 < p < 1, 0 < q < 1)$ とおくとき，次の問いに答えよ.

**(1)** $A$ の固有値および固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

**(2)** $A$ を対角化する行列の1つを求め，$A$ を対角化せよ.

**(3)** $A^n$ を求めよ.

**(4)** $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

## 問題2

次の行列 $A$ について考える

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

**(1)** $A$ の階数を求めよ.

**(2)** $A$ の行列式を求めよ.

## 問題3

**(1)** 極座標表示された曲線 $C: r = \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の概形を $(x, y)$ 直交座標系に描きなさい．曲線 $C$ と $x$ 軸，$y$ 軸との交点の値も記入すること．

**(2)** $x$ および $y$ を $\theta$ の関数で表しなさい．

**(3)** 曲線 $C$ の長さを求めなさい．

## 問題4

**(1)** 関数 $f(x, y)$ が連続な2階導関数をもつとする．関数 $f$ が点 $\mathrm{A}(a, b)$ で $f_x = 0, f_y = 0$ となるとき，$\Delta \equiv f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} < 0$ であれば，$f(a, b)$ は極値となることを示しなさい．必要であれば，次のテイラーの定理を用いて，$f(a+h, b+k) - f(a, b)$ を計算すること．

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b) + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h, b+\theta k).$$

ただし，$0 < \theta < 1$ とする．

**(2)** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10$ において，$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めなさい．この関数 $f(x, y)$ が極値をもつならば，その極小値もしくは極大値を求めなさい．