

数 学

1

(1) x を正の実数とする。 $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ とおく。

$$\begin{aligned} 0 < x \leq \frac{1}{3} \text{ のとき} \quad f(x) &= \boxed{\text{アイ}} x - \boxed{\text{ウ}} \\ \frac{1}{3} < x \leq 2 \text{ のとき} \quad f(x) &= \boxed{\text{エ}} x - \boxed{\text{オ}} \\ x > 2 \text{ のとき} \quad f(x) &= \boxed{\text{カ}} x + \boxed{\text{キ}} \end{aligned}$$

である。

(2) $(x+y)^8$ の展開式における x^3y^5 の係数は $\boxed{\text{クケ}}$ であり, $(x+y+z)^{10}$ の展開式における $x^3y^5z^2$ の係数は $\boxed{\text{コサシス}}$ である。

(3) x, y は正の整数であり, $xy = 2048$ および $x \leq y$ を満たすものとする。 $(\log_2 x) \cdot (\log_2 y)$ の最大値は $\boxed{\text{セソ}}$ であり, そのときの x の値は $\boxed{\text{タチ}}$ である。

(4) 1 個のサイコロを 3 回投げると, 2 回目に出た目の数が 1 回目に出た目の数よりも大きくなる確率は $\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ であり, 2 回目に出た目の数が 1 回目よりも小さく, かつ 3 回目に出た目の数が 2 回目よりも小さくなる確率は $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

(5) 実数 x, y が $2x + y = 1$ を満たすとき, $x^2 + y^2$ の最小値は $\frac{1}{\boxed{\text{ネ}}}$ であり, そのときの x の値は $\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

2

$0 \leq x < \pi$ の範囲で、関数

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - \cos x + 1$$

を考える。また、 $t = -\sqrt{3} \sin x + \cos x$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)

$$t = \boxed{\text{ア}} \sin \left(x + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \pi \right)$$

である。したがって、 $0 \leq x < \pi$ のとき、 $\boxed{\text{工オ}} \leq t \leq \boxed{\text{力}}$ である。

(2) $y = f(x)$ とすると、

$$y = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} t^2 - t + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

となる。

(3) $f(x)$ は、 $x = \boxed{\text{シ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとり、 $x = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \pi$ のとき最大値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。

3

数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科1である受験者のみ、3と4の代わりに、記述3と記述4を解答してもよい。

数列 $\{a_n\}$ が、 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ 、および

$$2a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められるものとする。

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。以下の問い合わせよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ は次を満たす。

$$\boxed{\text{ア}} b_{n+2} = \boxed{\text{イ}} b_{n+1} + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 2次方程式

$$\boxed{\text{ア}} t^2 - \boxed{\text{イ}} t - 1 = 0$$

の解を α, β ($\alpha > \beta$) とすると、

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}, \beta = \frac{\boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

$$\boxed{\text{ア}} b_{n+2} - \boxed{\text{イ}} b_{n+1} - b_n = \boxed{\text{ア}} \{b_{n+2} - (\alpha + \beta)b_{n+1} + \alpha\beta b_n\}$$

なので、

$$b_{n+2} - \alpha b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} (b_{n+1} - \alpha b_n)$$

$$b_{n+2} - \beta b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}} (b_{n+1} - \beta b_n)$$

が成り立ち、

$$b_{n+1} - \alpha b_n = \left(\frac{\boxed{\text{ソ}} - \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}} \right)^n$$

$$b_{n+1} - \beta b_n = \left(\frac{\boxed{\text{ツ}} + \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}} \right)^n$$

となる。したがって、

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}} \left\{ \left(\frac{\boxed{\text{ニ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} \right)^n - \left(\frac{\boxed{\text{ノ}} - \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \right)^n \right\}$$

となる。

(3) $a_n = \boxed{\text{フ}} b_{n+1} - \boxed{\text{ヘ}}$ である。

$n \geq 3$ では、(1) を用いると、 $a_n = \boxed{\text{ホ}} b_{n-1} + b_{n-2} - \boxed{\text{ヘ}}$ である。

4

数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科1である受験者のみ、3と4の代わりに、記述3と記述4を解答してもよい。

a を実数の定数とし、関数 $f(x)$ が任意の x に対して

$$f(x) = x^3 - 2 - \int_a^x f(t) dt$$

を満たすとする。以下の問い合わせよ。

(1)

$$f(a) = a^{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}$$

であり、

$$f'(a) = -a^3 + \boxed{\text{ウ}} a^2 + \boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) $f(x)$ が2次式ならば、

$$f(x) = \boxed{\text{オ}} x^2 - \boxed{\text{カ}} x + \boxed{\text{キ}}$$

であり、 $a = \boxed{\text{ク}}$ である。

(3) $f(x)$ が(2)の2次式であるとする。 n を1以上の整数とするとき、

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x) dx = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} n^2 - \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} n,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(k-1) + f(k)}{2} - \int_0^n f(x) dx = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} n$$

である。

記述 3

数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者のみ、**3** と **4** の代わりに、**記述 3** と **記述 4** を解答してもよい。

点 (x, y) が $x^2 + y^2 - 4x + 3 \leq 0, y \geq 0$ の表す領域 D 内を動くとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) $x + y$ の最小値と最大値を求めよ。

記述 4

数理工学科またはデータサイエンス学科が志望学科 1 である受験者のみ、**3** と **4** の代わりに、記述**3** と記述**4** を解答してもよい。

- (1) 1 から 9 までの整数の 2 乗をそれぞれ 3 で割ったときの余りを求めよ。
- (2) n は正の整数とする。 n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 か 1 になることを証明せよ。
- (3) a と b はともに 3 で割ると 1 余る正の整数であるとする。 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす正の整数 c は存在しないことを証明せよ。