ダブル・オークションと最適反応ダイナミクス

大阿久　博

一．はじめに

近年のコンピュータ・ネットワークの発展とともに、「オークション」が身近なものになってきた（インターネット上のオークションは「ネット・オークション」と呼ばれている）。そこでは誰もが簡単に商品の販売者、あるいは入札者になることができるため、最近では個人商取引の代表的な形態となってきているとさえ言われている。日本最大のオークションサイトであるヤフー・オークションでは、常時一千万点以上の商品が売りに出されており、今後さらにオークション取引は拡大して行くものと予想されている。

さて、一口にオークションといっても様々な形態のものが存在する[1]。一般によく知られているのは、伝統的なイングリッシュ・オークションであろう。これは、競売人がコールする価格を徐々に上げていき、それに併せて買手は自らの判断で引き続き参加するか降りてしまうかを決定し、最後まで残ったものが勝者となり、自分を除く最後の入札者が脱落したときの価格で財を手にすることができる、というものである。このイングリッシュ・オークションも1種類ではなく、実際にはいくつかのバリエーションがある。

またこれとは逆に競売人がコールする価格を下げていき、最初に購入の意思を示したものが勝者となるダッチ・オークションという形態もある。また、入札方式でのオークションも広く行われており、入札額の最も高いものが勝者となるが、支払額がその最高値になる一位価格オークションと二番目に高い入札額が支払額になる二位価

格オークション（ヴィッカレー・オークション）といった異なる支払い方式が存在する。いわゆる不完備情報ゲームの発展によりこれらのオークションについての分析も進められ、実際のオークション取引にも応用されるようになってきた[2]。

以上は買手・売手のどちらか一方は一人のオークションで、one-sided と呼ばれる形態であるが、買手・売手の両方とも複数というダブル・オークション（Two-sided オークション）という形態もある。例えば株式や外貨などの取引の場合がこれに相当する。ダブル・オークションは、どちらかが単数である one-sided オークションの場合と比較すると分析はかなり複雑になる。そのためダブル・オークションに関する研究は one-sided オークションの研究に比べると若干遅れているようである。

本稿では、まず提示する価格が二つの場合の単純なダブル・オークション・モデルを構築し、最適反応ダイナミクスを利用して均衡の安定性を考える。その後価格を一般化した場合を考える。後半では Agastya[2]による確率的安定性の議論を再考する。

二．ダブル・オークション—進化ゲーム論的分析

1．２価格の単純モデル

はじめに Agasty[2]に基づいて単純なダブル・オークションのモデルを構築しよう。そのモデルに対して[2]とは異なる手法（最適反応ダイナミクス）を使って分析を行うが、それでも同様の結果が得られることを示す。

いま危険中立的な多数の買手からなる集団Bと同じく多数の売手からなる集団Sを仮定する。単純化のために買手・売手が提示する価格は２つ、$p \in (0,1)$と$P \in (0,1)$で、かつ $p < P$ であるとする。買手・売手の留保価値(reservation value)はそれぞれ 1 と 0 とする。したがって価格Pで取引が行われると買手の利得は$1-P$、売手の利得はPになる。こうした二つの集団からそれぞれ買手・売手がペアになり(ランダム・マッチング)次のよう

なダブル・オークションを行う。

- 各集団から抽出された買手と売手がペアになり、それぞれ価格を同時に提示する。
- 売手の提示価格(ask price)の方が買手の提示価格(bid price)より高い場合は取引は行われず、両者の利得はゼロになる。
- 買手の価格が売手の価格に等しいか、あるいは高い場合は取引が成立する。このとき取引価格は確率 k で買手の提示価格、確率 1－k で売手の価格になる。ただし $0<k<1$ とする。(以上の設定を **k-ダブル・オークション**と呼ぶことにする。)
- 取引に至らなかったペアはそのまま集団に残り、取引を行ったペアは集団から退場し、代わりの主体と入れ替わる。

この設定では、各買手・売手のペアは次の表1の標準型ゲームを行うことになる。ただし $q = \mathrm{k}P + (1-\mathrm{k})\mathrm{p}$ である。

		売手	
		p	P
買手	p	1－p、p	0、0
	P	$1-q$、q	$1-P$、P

表 1:　2 価格 k-ダブル・オークション

この利得表を正規化すると次のようになる。

		売手	
		p	P
買手	p	$-\mathrm{p}+q$、p	0、0
	P	0、0	$1-P$、$P-q$

表 2:　2価格 k-ダブル・オークション–正規化

利得表1 あるいは2から、戦略の組(p, p)と(P,P)が強ナッシュ均衡(strict Nash equilibrium)であることはすぐわかる。また、仮に買手・売手が混合戦略を使えるとすると、混合戦略ナッシュ均衡

$$\left(\left[\frac{P-\mathrm{p}}{\mathrm{p}+P-q},\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}+P-q}\right],\left[\frac{1-P}{-\mathrm{p}+q+1-P},\frac{\mathrm{p}-q}{-\mathrm{p}+q+1-P}\right]\right)$$

が得られる[3]。

また、買手の集団Bにおいて価格 p を提示するものの割合をx、Pを提示するものの割合を$1-x$とする。このとき、xと$1-x$の組$(x,1-x)$は買手集団の状態を示しているが、別の解釈として、この集団から任意に買手を選ぶと、その買手は価格 p をxの割合で提示し、Pを$1-x$で提示するという混合戦略を取ると見なすことも出来る。またここでは二つの価格しか想定していないので、集団の状態および混合戦略はxだけでも表せる。同様に、買手の集団Sにおいて価格 p を提示するものの割合をy、Pを提示するものの割合を$1-y$とする[4]。

売手の集団の状態がyのとき、任意の買手が価格 p を提示したときの期待利得を $\pi_B^{\mathrm{p}}(y)$、価格Pを提示したときの期待利得を$\pi_B^{P}(y)$ とすると表2から、

$$\pi_B^{\mathrm{p}}(y)=y(-\mathrm{p}+q)$$
$$\pi_B^{P}(y)=(1-y)(1-P)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
&y > y^* = \frac{1-P}{-\mathrm{p}+q+1-P} \Rightarrow \pi_B^{\mathrm{p}}(y) > \pi_B^{P}(y)\text{: } p\text{が最適} \\
&y < y^* = \frac{1-P}{-\mathrm{p}+q+1-P} \Rightarrow \pi_B^{\mathrm{p}}(y) < \pi_B^{P}(y)\text{: } \mathrm{P}\text{が最適} \qquad (1) \\
&y = y^* = \frac{1-P}{-\mathrm{p}+q+1-P} \Rightarrow \pi_B^{\mathrm{p}}(y) = \pi_B^{P}(y)\text{: } \mathrm{p}, P\text{は無差別}
\end{aligned}$$

であることがわかる。同様に、価格 p を提示した売手の期待利得を$\pi_S^{\mathrm{p}}(x)$、価格P のときの期待利得を$\pi_S^{P}(x)$とすると、

$$\begin{aligned}
&x > x^* = \frac{P-q}{\mathrm{p}+P-q} \Rightarrow \pi_S^{\mathrm{p}}(x) > \pi_S^{P}(x)\text{: } \mathrm{p}\text{が最適} \\
&x < x^* = \frac{P-q}{\mathrm{p}+P-q} \Rightarrow \pi_S^{\mathrm{p}}(x) < \pi_S^{P}(x)\text{: } \mathrm{P}\text{が最適} \\
&x = x^* = \frac{P-q}{\mathrm{p}+P-q} \Rightarrow \pi_S^{\mathrm{p}}(x) = \pi_S^{P}(x)\text{: } \mathrm{p}, P\text{は無差別}
\end{aligned}$$

であることがわかる。

いま、売手の集団の状態がy のとき、$y > y^*$ならば買手は p が最適、つまり$(x, 1-x)$を混合戦略と解釈すると$x=1$が最適反応になる。したがって、売手集団の状態y に対する買手の最適反応を$BR_B(y)$とすると、式(1)より、

$$BR_B(y)=\left\{\begin{array}{ll}1 & :y\in(y^*,1]の場合\\ [0,1] & :y=y^*の場合\\ 0 & :y\in[0,y^*)の場合\end{array}\right\}$$

が得られる。これは $[0,1]$ の一点に $[0,1]$ の集合を対応させる多価写像（対応）になる。これを $BR_B:[0,1]\rightarrow\rightarrow[0,1]$ と書くことにする。全く同様に売手の最適反応対応 $BR_S:[0,1]\rightarrow\rightarrow[0,1]$ も次のように書ける。

$$BR_S(y)=\left\{\begin{array}{ll}1 & :x\in(x^*,1]の場合\\ [0,1] & :x=x^*の場合\\ 0 & :x\in[0,x^*)の場合\end{array}\right\}$$

2. 2価格の単純モデルの最適反応ダイナミクス

時々刻々と買手・売手の集団からペアが組まれ、価格の提示が行われ、ダブル・オークション取引が進められるとする。各ペアでの買手・売手の提示価格はいくらであったか、といった情報を売手・買手の全員が観察できるならば、各買手・売手は相手の集団の状況を把握することができ、それに対する最適な価格を提示することができる。つまり、買手・売手とも相手集団の情報を元に、提示価格をもっとも利得を高くする価格に変更することができるのである。このことにより時間が経つにつれ、各集団の状態は変化していく。

結局、各集団は、相手集団の状態に対する最適反応の方向に、時々刻々と集団における p と P を取る割合を変化させていくことになる。このとき買手・売手の集団の状態は時間 t の関数と考えられる。以下では t 時点で

の買手・売手の状態をそれぞれ$x(t)$、$y(t)$と書くことにしよう。ただし$t \in [0,\infty)$とする。

買手の最適反応対応$BR_B : [0,1] \rightarrow\rightarrow [0,1]$は$y(t) = y^* = \dfrac{1-P}{-\mathrm{p}+q+1-P}$のとき多価になる。ここでは、$y(t) = y^*$のときには$BR_B(y(t)) = 1$としよう。つまり$BR_B(y)$から次のように一価関数$h_B : [0,1] \rightarrow [0,1]$を抜き出すのである。

$$BR_B(y(t)) \ni h_B = \begin{cases} 1 & : y \in [y^*,1] \text{の場合} \\ 0 & : y \in [0,y^*) \text{の場合} \end{cases}$$

この一価関数h_Bを使うと、時間の経過に伴う買手集団状態の変化は次の式(2)のように書ける。

$$\frac{dx(t)}{dt} = h_B(y(t)) - x(t) \tag{2}$$

この式は、買手集団の状態の変化$\left(\dfrac{dx(t)}{dt}\right)$が、現在の状態$(x(t))$から最適反応$(h_B(y(t)))$の方へ向かっていくことを示している。

売手集団についても同様に考えると、次のダイナミクスが得られる。

$$\frac{dy(t)}{dt} = h_S(y(t)) - x(t) \tag{3}$$

ただし、

$$BR_S(x(t)) \ni h_S = \begin{cases} 1 & : x \in [x^*, 1] \text{の場合} \\ 0 & : x \in [0, x^*) \text{の場合} \end{cases}$$

である。

ダイナミクス(2)・(3)の解は、$0 \leq t_0 < t$ のとき $s \in (t_0, t)$ に対して、

$$x(t) = \begin{cases} 1-(1-x(t_0))e^{-(t-t_0)} & : y(s) \in [y^*, 1] \\ x(t_0)e^{-(t-t_0)} & : y(s) \in [0, y^*) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1-(1-y(t_0))e^{-(t-t_0)} & : x(s) \in [x^*, 1] \\ y(t_0)e^{-(t-t_0)} & : x(s) \in [0, x^*) \end{cases}$$

を満たす。このときある $\mathrm{k} \in (0,1)$ に対して、

$$x^* = \frac{P-q}{\mathrm{p}+P-q} = \frac{(1-\mathrm{k})(P-\mathrm{p})}{P-\mathrm{k}(P-\mathrm{p})}$$

$$y^* = \frac{1-P}{-\mathrm{p}+q+1-P} = \frac{1-P}{\mathrm{k}(P-\mathrm{p})+(1-P)}$$

であり、x^* と y^* はともにkの減少関数である。以下ではkの関数であることを鑑み $x^*(\mathrm{k})$、$y^*(\mathrm{k})$ と書くことにする。また、

$$\lim_{k \to 0} x^*(\mathrm{k}) = 1 - \frac{\mathrm{p}}{P}, \qquad \lim_{k \to 1} x^*(\mathrm{k}) = 0$$

$$\lim_{k \to 0} y^*(\mathrm{k}) = 1, \qquad \lim_{k \to 1} y^*(\mathrm{k}) = \frac{1-P}{1-\mathrm{p}}$$

に注意する。

このときある k に対して集団 B、S の推移は次の図 1 のようになる。

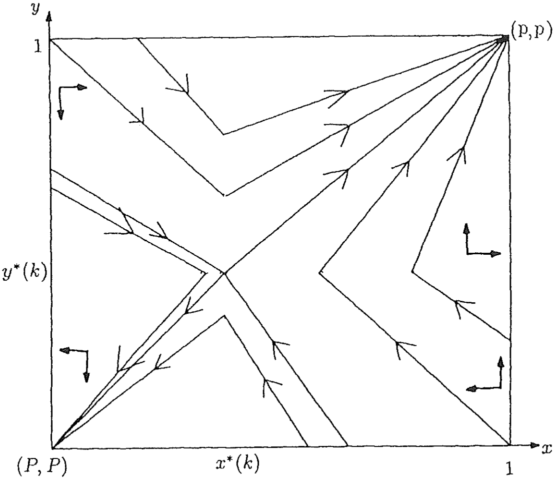

図 1: 2価格 k-ダブル・オークション

この図 1 から、二つの強ナッシュ均衡 (p, p) と (P, P) は漸近安定であり、初期点の位置によって (p, p) あるいは (P, P) のどちらかに収束することがわかる。

次に$k\rightarrow 1$の場合を考えよう。これは取引が成立したとき、買手の提示価格で実際の取引が行われる確率が高くなることを表している。$x^{*}(\mathrm{k})\rightarrow 0$、$y^{*}\rightarrow\dfrac{1-P}{1-\mathrm{p}}$であり、$\dfrac{1-P}{1-\mathrm{p}}$が十分小さい値になるなら(この値はpと$P$の乖離が大きいほど小さくなる)、強ナッシュ均衡(p, p)の収束領域が広くなる(図2)。つまり、pとPの乖離が大きい場合、kが大きくなる(売手にとって有利な取引価格が採用される確率が高い)ほど、長期的には低い提示価格が選択されるようになる可能性が高い、ということである[5]。

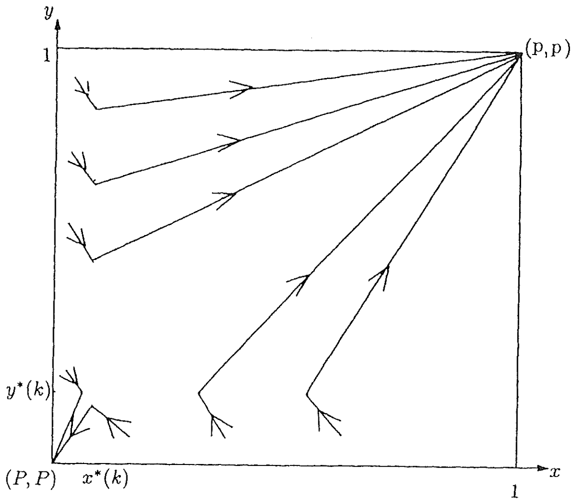

図 2:　kを1に近づけた場合(1)

しかし、pとPの値が極めて近い場合には、$\frac{1-P}{1-p}$の値が1に近いため上記のような結果になるかどうかわからない(図3)。

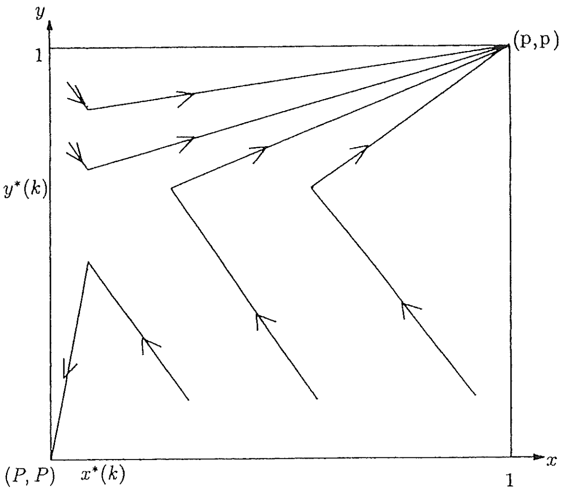

図3: kを1に近づけた場合(2)

このときには、pとPの値が近いほど、つまり$\frac{1-P}{1-p}$の値が1に近いほど、$x(t)\in(x^*(k),1]$、$y(t)\in[0,y^*(k))$の領域にとどまる期間が長い、つまり 買手集団で価格pを提示する人の割合が減少し、売手の集団でpを提示する人の割合が減少する期間が長くなると予想される。

また、kの値が小さい(ゼロに近づいた)とき、pとPの値の乖離が大きいほど、つまり$1-\frac{P}{p}$の値が1に近いほど、(P,P)に収束する領域が大きくなる。

3. 価格の一般化

これまでは買手・売手が提示する価格はpとPの二つだけの場合を考えてきたが、次に買手・売手の提示する価格の集合—つまり純粋戦略—を$\Gamma_n=\{1/n,2/n,\ldots,i/n,\ldots,(n-1)/n\}$とする[6]。特に買手の提示価格が$1/n$のとき$p_B^i\in\Gamma_n$と書き、売手の場合は$p_S^i\in\Gamma_n$と書くことにする。

またΔ_nをΓ_n上の確率分布の集合とする。つまりx_iをi/nに割り振る確率とすれば$\sum_{i=1}^{n-1}x_i=1$で、$x=(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{n-1})\in\Delta_n\subset\Re^{n-1}$は、買手あるいは売手集団の状態を表すことになる。以下では、$x=(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{n-1})\in\Delta_n$で買手の集団状況を、$y=(y_1,y_2,\ldots,y_i,\ldots,y_{n-1})\in\Delta_n$で売手の集団状況を表すとする。同時にそれは任意に一人の買手(あるいは売手)を抜き出したとき、彼がΓ_n上の混合戦略$x\in\Delta_n$(あるいは$y\in\Delta_n$)を取る、と見なすこともできる。

また、取引価格がpのとき買手・売手のフォン・ノイマン=モルゲンシュテルン効用(利得)をそれぞれ$v(\mathrm{p})$、$w(\mathrm{p})$とし、取引が行われない場合は両者の利得はともにゼロであるとする[7]。さらに、次の(i)から(iii)を仮定する[8]。

(i) $v(\mathrm{p})$と$w(\mathrm{p})$は共有知識

(ii) $v(1)=w(0)=0$

(iii) $v'(\mathrm{g})<0$, $w'(\mathrm{g})>0$

ここで、売手集団の状態が$y \in \Delta_n$のとき、ある買手が価格p_B^iを提示した場合を考えよう。このとき、買手の提示した価格p_B^iが相手の提示した価格p_S^jより高い場合($p_S^j \leq p_B^i$)に取引が成立し、相手がp_S^jをプレーする確率はy_jであり、そのとき取引価格は確率kでp_B^iになり、確率$1-k$でp_S^jになるので、買手の期待利得は、

$$V_B(p_B^i, y) = \sum_{p_S^j \leq p_B^i} y_j [kv(p_B^i) + (1-k)v(p_S^j)] \tag{4}$$

と表される。また、買手のyに対する純粋戦略での最適反応は、

$$\overline{BR_B}(y) = \{p_B^i \mid V_B(p_B^i, y) \geq V_B(p_B^l, y), \forall p_B^l \in \Gamma_n\}$$

である。

ここで$\sum_{i=1}^{n-1} x_i V_B(p_B^i, y)$を考えると、これは各純粋戦略から得られる利得を集団の状況$x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$でウエイト付けした合計である。言い換えれば、あるプレイヤーが混合戦略xをプレーしたときの利得であり、これを$V_B(x, y)$と書くことにする。よって、$y \in \Delta_n$に対する買手の混合戦略での最適反応は、

$$BR_B(y) = \{x \in \Delta_n \mid V_B(x, y) \geq V_B(x', y), \forall x' \in \Delta_n\} \tag{5}$$

と書ける。

同様に、買手の集団状態が$x \in \Delta_n$のとき、ある売手が価格p_S^jを提示したならば期待利得は、

$$V_S(p_S^j, x) = \sum_{p_B^i \geq p_S^j} x_i [kw(p_B^i) + (1-k)w(p_S^j)] \tag{6}$$

であり、xに対する純粋戦略最適反応は、

$$\overline{BR_S}(x) = \{p_S^j \mid V_S(p_S^j, x) \geq V_S(p_S^l, x), \forall p_S^l \in \Gamma_n\}$$

となる。また買手のときと同様に、$x \in \Delta_n$ に対する売手の混合戦略最適反応は、

$$\mathrm{BR}_S(x) = \{y \in \Delta_n | V_S(y,x) \geq V_B(y',x), \forall y' \in \Delta_n\} \tag{7}$$

である。

BR_l（$l = B$あるいはS）は Δ_n から Δ_n への多価の写像で、これを

$$BR_l : \Delta_n \rightarrow\rightarrow \Delta_n$$

と記す。

以上の設定の下、まず次がわかる。

補題1

任意の $\mathrm{p} \in \Gamma_n$ に対して、買手・売手の全員が p を提示する戦略プロファイルは強ナッシュ均衡である。

［証明］

まず、任意の買手が価格 p_B^i を提示する場合、$\mathrm{p}_B^i < \mathrm{p}$ であると取引自体が成立しない。$\mathrm{p}_B^i > \mathrm{p}$ のとき、すべての売手が p を提示する売手の集団の状況を $\mathbf{p}$ と書くことにすると

$v'(g) < 0$ から、

$$\begin{aligned} V_B(\mathrm{p}_B^i, \mathbf{p}) &= \mathrm{k}v(\mathrm{p}_B^i) + (1-\mathrm{k})v(\mathrm{p}) \\ &< \mathrm{k}v(\mathrm{p}) + (1-\mathrm{k})v(\mathrm{p}) \\ &= v(\mathrm{p}) = V_B(\mathrm{p}, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

となる。したがって $\mathbf{p}$ に対しては p が唯一の最適反応である。

また、売手の方も同様に、

$$V_S(\mathrm{p}_S^j, \mathbf{p}) = \mathrm{k}w(\mathrm{p}) + (1-\mathrm{k})v(\mathrm{p}_S^j)$$

$$< \mathrm{k}w(\mathrm{p}) + (1-\mathrm{k})w(\mathrm{p})$$
$$= w(\mathrm{p}) = V_S(\mathrm{p}, \mathbf{p})$$

よって、やはりpが唯一の最適反応である。

（1）ダイナミクス

さてここでも前節と同様、各集団が相手集団の状態に対する最適反応の方向に、時々刻々と集団の構成を変化させていく状況を考えよう。このときには買手・売手の集団の状態は時間tの関数と考えられ、前節と同じくt時点における買手・売手の集団状態をそれぞれ $x(t)$、$y(t)$と書くことにしよう。

このとき式(5)と(7)から、次のような最適反応ダイナミクスが得られる。

$$\frac{dx(t)}{dt} \in BR_B(y(t)) - x(t), \qquad t \geq 0 \qquad (8)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} \in BR_S(x(t)) - y(t), \qquad t \geq 0 \qquad (9)$$

前節では、多価になる最適反応$BR_B(y(t))$から一価関数$h_B(y(t))$を抜き出してダイナミクスを構成したが、ここでは多価になる対応をそのままダイナミクスに利用している。[9]このダイナミクスは、買手・売手の集団が、各時点においてそれぞれの提示価格の分布を知り、それに対する最適な提示価格分布の集合に向かって進化していくことを表している。

また、

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

とし、さらに

$$B(X(t))=\begin{pmatrix} BR_B(y(t))-x(t) \\ BR_S(y(t))-y(t) \end{pmatrix}$$

とすると、(8)と(9)は、

$$\frac{dX(t)}{dt}\in B(X(t)) \tag{10}$$

とシンプルな形になる。ただし、$\Delta_n \times \Delta_n \equiv \Delta \subset \Re^{2(n-1)}$ とすると、B は $B:\Delta \to\to \Delta$ なる多価写像である。

ダイナミクス(10)において、$0 \in B(X^*)$ を満たす $X^*=(x^*,y^*)^T$ を**定常点**(**stationary point**)と呼ぶ[10]。書き換えると

$$x^* \in BR_B(y^*)$$
$$y^* \in BR_B(x^*)$$

ということであり、これは買手・売手が互いに最適な戦略を取り合っている状態を示している。これより次がわかる。

命題1

k-ダブル・オークションのナッシュ均衡からなる集合を NE、ダイナミクス(10)の定常点からなる集合を SP とすると、$NE=SP$ である。

したがって、強ナッシュ均衡であった買手・売手の全員が p を提示する戦略プロファイル（p，p）も、ダイナミクス(10)の定常点である。

（2）多価写像の性質

上記のダイナミクスを構成しているのは多価写像であるが、多価写像の場合も一価関数と同様に、ある種の連続性が重要になる場合が多い。

定義1

多価写像　$F:\Re^m \to\to \Re^m$ が $x_0 \in \Re^m$ **において上半連続**(upper semi-continuous)であるとは、$F(x_0)$ を含む任意の開集合 $M \subset \Re^m$ に対して、x_0 の近傍 U が存在し、$\forall x \in U$ に対して、$F(x) \in M$ が成り立つ場合をいう[11]。また、すべての $x \in \Re^m$ において上半連続であるとき単に F は上半連続であるという。

Aubin and Cellina[1]の Proposition 1.1.2 と Corollary 1.1.1 から上半連続な多価写像について次が成り立つことがわかる。

補題2

多価写像 $F:\Delta \to\to \Delta$ がコンパクト値ならば、次の(i)と(ii)は同値である。

(i) F は $x_0 \in \Delta$ において上半連続

(ii) Δ の点列 $\{x_n\}$ に対して、すべての n について $z_n \in F(x_n)$ なる点列 $\{z_n\}$ をとる。$n \to \infty$ としたとき $x_n \to x_0$ かつ $z_n \to z_0$ であるとき、$z_0 \in F(x_0)$ となる。

ダイナミクス(10)を構成する多価写像 B は次の都合の良い性質を持つ。

$$x_n' \in BR_n(y_n)$$

$$y_n \to y_0, \qquad x_n' \to x_0' \qquad (n \to \infty)$$

とする。

補題3

$B:\Delta \to\to \Delta$ は上半連続、かつコンパクト・凸値である。

［証明］

任意の y に対して $BR_B(y)$ は $\Re^{n-1}$ の単体内の集合であり有界である。また BR_B の定義から閉集合でもある。したがって $BR_B(y)-x$ はコンパクトである。$BR_S(x)-y$ についても同様である。したがって、直積 $B(X)=(BR_B(y)-x)\times(BR_S(x)-y)$ もコンパクトである。

$a,b\in BR_B(y)$ とする。$u\in(0,1)$ について $ua+(1-u)b$ を考える。任意の $x'\in\Delta_n$ に対して、

$$\begin{aligned}V_B(ua-(1-u)b) &= \sum_i (ua_i+(1-u)b_i)V_B(\mathrm{p}_B^i, y)\\ &=\sum_i ua_iV_B(\mathrm{p}_B^i, y)+\sum_i (1-u)b_iV_B(\mathrm{p}_B^i, y)\\ &=uV_B(a,y)+(1-u)V_B(b,y)\\ &\geq V_B(x',y)\end{aligned}$$

が成り立つ[12]。

したがって、$ua+(1-u)b\in BR_B(y)$ であることから、$BR_B(y)$ は凸集合であることがわかる。同様に $BR_S(x)$ も凸集合であり、凸集合の直積集合も凸であるから、B は凸値である。

次に Δ_n の二つの点列 $\{y_n\}$ と $\{x_n'\}$ に対して、

このとき、$\forall x'' \in \Delta_n$ に対して、$V_B(x'_n, y_n) \geq V_B(x'', y_n)$ であり、$n \to \infty$ を考えると、$V_B(x, y)$ の x と y に関する連続性から、$V_B(x'_0, y_n) \geq V_B(x'', y_0)$ である。したがって $x'_0 \in BR_B(y_0)$ である。よって補題2から $BR_B(\cdot)$ は上半連続である。同様に $BR_S(\bullet)$ も上半連続あることがわかる。

$\Delta = \Delta_n \times \Delta_n$ の点列 $\{X_n\} = \{(x_n, y_n)\}^T$ と $\{Z_n\} = \{(z_n^1, z_n^2)\}^T$ を考える。ただし、$z_n^1 \in BR_B(y_n) - x_n$、$z_n^2 \in BR_S(x_n) - y_n$、$x_n \to x_0, y_n \to y_0$ （$n \to \infty$）（つまり $X_n \to X_0$）、$z_n^1 \to z_0^1, z_n^2 \to z_0^2$ （$n \to \infty$）（つまり $Z_n \to Z_0$）とする。このとき BR_l （$l = B, S$）が上半連続かつコンパクト値であることから、$n \to \infty$ を考えると $z_0^1 + x_0 \in BR_B(y_0)$、$z_0^2 + y_0 \in BR_S(x_0)$ である。したがって、

$$Z_0 = (z_0^1, z_0^2)^T \in B(X_0) = (BR_B(y_0) - x_0, BR_S(x_0) - y_0)$$

であり、$B(\cdot)$ は上半連続である。

この補題３で示したような $B: \Delta \to\to \Delta$ の性質と Aubin and Cellina[1],Theorem 2.1.4 あるいは Smirnov[8],Corollary 4.4 からダイナミクス(１０)に解 $X(\cdot) \in \Delta, (X(0) \in \Delta)$ が存在することがわかる。

さらに Aubin and Cellina[1],Theorem 6.5.2 より次がわかる。

命題2

もしダイナミクス(10)の解 $X(\cdot)$ がある $X^* \in \Delta$ に収束するならば、$X^* \in SP = NE$ である。

この命題から、時間の経過とともに買手・売手の集団の状態がある状態に近づいていくならばそれはナッシュ均衡であるということはわかるが、どの均衡が収束先として実現されやすいか…長期的にどの均衡が観察されやすいか…等については何も情報が得られない。

Agastya[2]は、リスク・ポテンシャルという概念を導入し、長期的に観測される均衡とこのリスクポテンシャル間の関係を明らかにした。

三、Agastya による分析

これまで多価微分方程式を使う方法で分析を行ってきたが、現段階ではシャープな結果を得るには至っておらず今後の課題としたいが、前節の最後で指摘したように、Agastya[2]では、Ellison[3]の手法を利用し、いくつかの興味深い結果が得られている。これらの結果を紹介する。

1. リスクポテンシャル

一人の買手と一人の売手の間で第 2.3 節で示したようなダブル・オークションが行われるとする。ただし、買手・売手のフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン効用（利得）、$v(p)$ と $w(p)$ には次の(i)から(iv)を仮定する。また取引が行われない場合は両者の利得はともにゼロであるとする。

(i) $v(p)$ と $w(p)$ は共有知識

(ii) $v(1)=w(0)=1$

(iii) $v(g)$ と $w(g)$ は厳密な凹関数であり、二回連続微分可能で $v'(g)<0, w'(g)>0$

(iv) $\lim_{p\to 1} v'(p)=-\infty$、$\lim_{p\to 0} w'(p)=\infty$

ここで、売手が混合戦略 $y\in\Delta_n$ を選択したとき、買手が価格 p_B^i を提示したならば期待利得は、式(4)と同じ $V_B(p_B^i, y)$ になり、同様に、買手が混合戦略 $x\in\Delta_n$ のとき、売手が価格 p_S^i を提示したならば期待利得は、式(6)

の$V_S(\mathrm{p}_S^l,x)$である。このとき次が成り立つ。

補題4

すべての$\mathrm{p}\in\Gamma_n$に対して、買手・売手の二人の戦略プロファイル(p, p)は強ナッシュ均衡である。

これは第2.1節の利得表からの結果や第2.3節の補題1と同じものである。この結果を受け、ある価格pの確率x_pが小さい場合にもpが唯一の最適反応になり得るなら、直感的に均衡(p, p)の安定性はより強いものになるであろうと予想できる。このことを測る道具としてAgastya[2]はリスク・ポテンシャルの概念を導入した。

定義2

均衡(p, p)は、次の条件を満たすときγの**リスク・ポテンシャル**[13]を持つという。

つまり、任意の混合戦略xと$l=B,S$に対して、

$$x_p > \gamma \Rightarrow (V_l(\mathrm{p},x) > V_l(q,x), q\in\Gamma_n, q\neq \mathrm{p})$$

この概念は、純粋戦略pがプレーされる確率がγを上回ることと、pが混合戦略xに対する**唯一**の最適反応であることが同値であるとき、γをリスク・ポテンシャルということである。したがって、リスクポテンシャルを小さく押さえられるほど、安定性が強いと考えられる。

また、次のような関数$r_n^l:[1/n,1-1/n]\to\mathfrak{R}(l=B,S)$、$r_n:[1/n,1-1/n]\to\mathfrak{R}$を用意する。

$$r_n^B(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{k}[v(\mathrm{p}) - v(\mathrm{p}+1/n)]}{\mathrm{k}v(\mathrm{p}) + (1-\mathrm{k})v(\mathrm{p}+1/n)}$$

$$r_n^S(\mathrm{p}) = \frac{(1-\mathrm{k})[w(\mathrm{p}) - v(\mathrm{p}-1/n)]}{(1-\mathrm{k})w(\mathrm{p}) + \mathrm{k}w(\mathrm{p}-1/n)}$$

$$r_n(\mathrm{p}) = \min\{r_n^B(\mathrm{p}), r_n^S(\mathrm{p})\}$$

例えばr_n^Bは、価格がpから$1/n$だけずれたとき(ずれる確率は1－k)の平均利得(分母)と、価格がぶれなかったとき(確率k)のずれたときに生じる差額($v(\mathrm{p})-v(\mathrm{p}+1/n)$)の期待値との比率を表している。

こののr_nを使って均衡(p, p)のリスクポテンシャルが特徴付けられる。

命題3

(Agastya[2],Proposition 4) 十分大きなnに対して、均衡(p, p)のリスクポテンシャルは $1-r_n(\mathrm{p})$である。

（2）マッチング・モデル

次に複数の主体から成る買手・売手の集団から各期ごとにm組のペアを作り、k-ダブル・オークションを行う場合を考える。

各期に取引に成功したペアは市場から退場し、代わりに同一のペアと入れ替わる。取引に成功しなかったペアは、市場にとどまり、再びマッチングされるのを待つ。

取引の際に、取引者は確率εで生じる独立したランダムなショックに従って各純粋戦略を等しい確率で選択するものとする。これは価格形成プロセスに**摂動**(pertubation)が存在するということであり、取引者が価格設定に

ミスを犯したと考えることができる。

取引者がミスを犯さなかった場合は、その取引者は前期の敵の集団における価格分布に対する最適反応戦略をプレーする。もし最適反応戦略が複数ある場合は、どれも等しい確率でプレーされるとする14。

こうした設定の元では、取引者の$t+1$時点における選択は、t時点の買手・売手双方の提示価格の分布のみに依存する。したがって、買手・売手の集団状態を第2.3節と同様にx、yで表すと、$t+1$時点での状態が(x,y)となる確率は、t時点の状態の条件付確率となる。したがって、提示価格の分布の時間にともなう変化は、(離散時点の)マルコフ過程で表せる。

また、状態(x,y)から他の状態への推移確率がゼロのとき(x,y)を**吸収状態**(absorbing state)という。

まず摂動のない状況、つまり$\varepsilon=0$においてAgastya[2]は、吸収状態とk-ダブル・オークションの強ナッシュ均衡が一致することを示した。つまり次が成り立つ。

補題5

(Agastya[2], Proposition 9)　すべての$\mathrm{p}\in\Gamma_n$に対して、すべての買手あるいは売手がpを取る集団状況を第2.3節と同様に$\mathbf{p}$と書くことにすると、買手・売手の状態$(\mathbf{p},\mathbf{p})$は吸収状態である。反対に、もし(x,y)が吸収状態であるならば、そのときすべての$\mathrm{p}\in\Gamma_n$に対して$x=y=\mathbf{p}$である。

次に摂動が存在する場合、つまり$\varepsilon\searrow 0$の場合を考える。最初のT期間内において状態(x,y)が観察される相対的な頻度を$\mu_T^{\varepsilon}(x,y)$で表すことにする。この頻度は通常初期状態に依存するが、この場合の価格分布のプロセスはエルゴード的であって初期状態のインパクトは時間が経つにつれ薄れていき、結果的に

$\mu^{\varepsilon}(x,y)=\lim_{T\to\infty}\mu_T^{\varepsilon}(x,y)$は初期状態に依存しないと見なせるようになる。この意味で$\mu^{\varepsilon}(x,y)$は、与えられたεに対する状態(x,y)が観察される長期確率(long-run plobability)を表している。

定義3

(x,y)が**確率的安定状態**(SSS)とは、$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu^{\varepsilon}(x,y)>0$であるときをいう。また、$\mathrm{p}\in\Gamma_n$が**確率的安定価格**であるとは、$(\mathbf{p},\mathbf{p})$がSSSのときをいう。

つまり確率的安定性とは、ミスが生じる確率が極めて小さい状況($\varepsilon\to 0$)であっても、当該状態が観察される長期確率が正であるという性質である。確率的安定状態についてAgastya[2]は次の結果を示した。

定理1

(Agastya[2],Theorem 11) 確率的安定状態は、摂動がない場合(つまり$\varepsilon=0$)の吸収状態である。さらに十分大きいnに対して、マッチングの数(m)が十分大きければ、確率的安定価格は最小のリスク・ポテンシャルを持つ。

四．結びに代えて

本稿ではダブル・オークションに関して、前半では最適反応ダイナミクスによる分析を、後半ではAgastya[2]による分析の紹介を行ったが、前者が連続時間系、後者が離散時間系の分析になっている。本来であれば、最適反応ダイナミクスにおける均衡の(弱)漸近安定性などについて調べるべきであるが、追加的条件がいくつか必要

になり、分析がかなり複雑になってしまうため、本稿ではそれらには触れていない。どの程度シンプルな条件で安定性の議論を展開できるか、今後の研究として興味深いところである。

また後半ではダブル・オークション参加者が「エラー」を犯す可能性を導入し、エラーが生じる確率が小さくなったときの確率的安定性の特徴を明らかにしている。これに相当する分析を最適反応ダイナミクスの手法を使って行うには確率微分方程式等の適用が考えられる。また、最適反応ダイナミクスだけではなく、他の所謂「学習ダイナミクス」[15]の適用も興味深く、今後の課題としたい。

参考文献

Aubin,J.P and A.Cellina, *Differential Inclusions,*Springer-Verlag,1984.

Agastya,M., Stochastic stability in a double auction, in *Games and Economic Behavior,* Vol.48, 2004, pp.203−222.

Deimling,K, *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1992.

Ellison,G., Basins of attraction, long-run stochastic stability, and the speed of step-by-step evolution, in *Review of Economic Studies*, Vol.67, pp.17−45, 2000.

Fudenberg,D. and D.K.Levine, *The Theory of Learning in Games*, The MIT Press, 1997.

Krishna,V., *Auction Theory,* Academic Press, 2002.

Milgrom,P., *Putting Auction Theory to Work*, Cambridge University Press, 2004.（川又邦雄・奥野正寛 監訳『オークション 理論とデザイン』東洋経済新報社, 2008.）

Morris,S., Rob,R., Shin,H.S., Dominance and belief potential, in *Econometrica* Vol.63, 145－157, 1995.

Smirnov,G.V., *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, American Mathematical Society, 2001.

Stiglitz,K., *Snipers,Shills,& Sharks*, Princeton University Press, 2007. (川越敏司他訳『オークションの人間行動学』日経 BP 社 2008.)

横尾 真『オークション理論の基礎』東京電機大学出版局, 2006.

---

1 オークション理論については、Krishna[5]、Milgrom[6]、Stiglitz[9]に詳しい。また横尾[10]には架空名義入札を伴うダブル・オークションについての興味深い分析がある。

2 米国での無線周波数売却のオークション(1993 年)が有名である。

3 ここで $\left[\dfrac{P-\mathrm{p}}{\mathrm{p}+P-q}, \dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}+P-q}\right]$ は、買手が価格 p を $\dfrac{P-q}{\mathrm{p}+P-q}$ の確率で提示し、価格 P を $\dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}+P-q}$ の確率で提示する混合線戦略を表している。売手の混合戦略も同様。

4 もちろん買手の場合と同じく、y と $1-y$ の組 $(y,1-y)$ が売手集団の状態を示しており、集団から任意に売手を選ぶと、価格 p を y の割合、P を $1-y$ で提示するという混合戦略を取ると解釈することが出来る。

5 集団の初期状態によっては (P,P) に収束する場合もあるが、初期状態がランダムに決定するなら (p,p) に収束する可能性が高くなる。この結果は Agastya[2]の p.204 で述べられていることであるが、ここでは最適反応ダイナミクスを使って同じような結果を得た。

6 ここでも価格は[0,1]内に設定している。$1/n$ を価格の一単位と考え、それの整数倍になっている価格の集合と見なせばよい。

7 ここでは簡単化のために、買手の効用を表す関数は共通であるとする。売手についても同様である。

8 これらの設定は基本的には Agastya[2]と同じであるが、本節で使わない仮定は除いてある。

9 一般にこうした微分方程式の多価写像版を"Differential Inclusions"あるいは"Multivalued Differential Equations"(多価微分方程式)と呼ぶ。これについては、Aubin and Cellina[1]、Smirnov[8]が詳しい。

10 ここで $\bullet^T$ はベクトルの転置を表す。

11 $\Re$ は実数体を表す。

12 ここで $ua_i+(1-u)b_i$ は $ua+(1-u)b$ が p_B^i に割り振る確率である。

13 リスク・ポテンシャルは Morris et al[7]の p -Dominance と似た概念である。

14 こうした設定は、前節までの最適反応ダイナミクスの離散時間バージョンと考えられる。

15 進化ゲーム理論における学習ダイナミクスは Fudenberg and Levine[4]に詳しい。学習ダイナミクスの様々な分野への応用も今後のますますの進展が望まれる研究分野である。