金融システムの構造と頑健性
——ネットワーク理論からのアプローチ——

田辺　昌徳

はじめに

金融システムは、「ネットワーク」として捉えることができる。本稿は、近年発展の著しいネットワーク理論に基づいて、金融システムの特徴を検討しようとする試みである。結論を要約すれば、金融システムは、理論的にも、実証的にもスケール・フリー・ネットワーク(scale-free network)と考えられ、このことからも、金融システムは構造的にシステミック・リスクを内包しているのではないか、というものである。

一、金融システムとネットワーク

金融システムは、各国において繰り返し危機に直面している。C. P. Kindleberger は、著書 "Manias Panics, and Crashes" において、一六一八年から一九九〇年代までの間に四六の大きな金融危機が生じたことを明らかにするとともに、"A Hardy Perennial" (死に絶えない多年草) という言葉を使って、金融危機が繰り返されてきたことを強調した。世界銀行の調査によれば、一九七〇年代の終盤から二〇〇二年までの二〇年強の間に、九三カ国において、多くの銀行の資本が枯渇すると

いう意味での銀行危機が一一三回生じた（世界銀行スタッフペーパーNo.428 "Managing the Real and Fiscal Effects of Banking Crisis" 2002)。また、最近では危機が一国の銀行ないし金融システムを超え、グローバルかつ市場横断的に、しかも極めて早いスピードで波及するようになってきている。金融の動揺が実体経済に及ぼす影響も早くなり、またグローバル化している。このため、金融システムの安定を確保していくことが、ますます重要な課題となっている。

金融システムの安定のためには、個々の金融機関のリスク管理や資本基盤の充実、あるいは市場取引の公正性、透明性の確保などが重要な課題であることは言うまでもない。しかし、個々の経営の失敗などから発して、金融システム全体が機能不全に陥っていくという危機に共通のプロセスをみると、その背後には、少なくとも個別の失敗の原因を超えた何かしか構造的な要素があると考えられる。

金融システムに危機をもたらすメカニズムは、「システミック・リスク(systemic risk)」の問題として、関係者にとって大きなテーマとなってきた。特に政策の観点からは、金融監督、セイフティー・ネットを含めたシステミック・リスクへの包括的、予防的な政策、いわゆる"マクロ・プルーデンシャル・ポリシー"(macro-prudential policy)の構築が大きな課題とされてきた。

理論的な面でもマクロ・プルーデンスに関する研究の蓄積が進んでいる。たとえば、初期の代表的な研究として一九八三年のD.W.Diamond and P.H.Dybvigによる"Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity" (the Journal of Political Economy）を挙げることができる。そこでは、預金取付けが実体経済にも悪影響をもたらすシステミック・リスクの原因とされた。その後、たとえばBIS（国際決済銀行）のCGFS（グローバル金融システム委員会）や二〇〇六年開催のシステミック・リスクをテーマとしたNY連邦準備銀行コンファランス(注1)は、決済不能の連鎖の問題や、市場取引の流動性低下、資産価格の低下、金融機関の資本基盤の劣化の連動（positive feedback）の問題に焦点が当たるようになってきている。

こうしたシステミック・リスクの問題を最近ではネットワーク理論を使って理解しようとする動きがある(注2)。たとえば、前述のNY連銀のコンファランスでは、工学など他分野のcomplex systemsの金融システムへの応用の議論も試みている。また、日本銀行でも金融機関間の資金取引などについてネットワーク理論に基づく実データの分析を行ってきてい

る（例えば、二〇〇三年　金融市場局「金融機関の資金取引ネットワーク」、二〇〇八年金融研究所「コール市場の資金取引ネットワーク」など）。他方、金融業を含めた企業の資産分布などについても、ネットワーク理論を活用した実証研究が行われてきている。しかしながら、これらは個別の取引類型を視野に入れたものであったり、資産規模の分布それ自身を関心の対象としていたりしていて、金融システム全体の大域的な問題、つまりシステミック・リスクやマクロ・プルーデンスの問題に焦点を当てているわけではない。

本稿では、最近のネットワーク理論の進展も踏まえ、金融機関の資産分布を手掛かりにしてマクロ・プルーデンスの観点から、金融システムの特質の一端を理論的、実証的に明らかにすることを試みる。ポイントは、金融システムがスケール・フリー・ネットワークであることが実証できたこと、それによって、スケール・フリー・ネットワークが一般に有する性質を、金融システムにも当てはめてみたことである。ただし、金融危機の具体的な背景、事情、たとえば資産バブルの問題等はここでは全て捨象し、外形的な構造のみを問題にしている。ここで論じているのは金融危機やシステミック・リスクのひとつの側面にすぎないことは、強調しなければならない。

二、金融機関の資産分布

金融システムを構成する金融機関の数や規模は、新たに設立されたり成長したりする一方、経営破たんや合併により消滅するといったプロセスの中で形成されていく。日本における一九九一年度から二〇〇三年度までの間の預金保険機構に加盟している金融機関数の変化をみると、少数ながら新設があったものの、一八一の金融機関破たんがあったほか、合併等による減少もあったため、金融機関全体の数は一、〇六九から六五八に減少した。米国でも前回金融危機以降、すなわち一九七九年から一九九四年にかけての動きをみると、一九七九年末の FDIC 加盟の金融機関数は一四、四三四行であったが、その後三、二二六行の新設が行われたものの、合併等により五、六四〇行が消滅し、一、五五四行が破たん・清算された結果、一九九四年末には一〇、四五二行に減少した。

次に、金融機関の資産の分布状況をみると、日米両国の金融機関の資産分布は、図表1および2の(1)にあるように、規模の小さな多数の金融機関と規模の大きい相対的に少数の金融機関が両極的に併存している。そのヒストグラムの形状は、平均値の周りに対称的な散らばりのある正規分布等とは大きく異なり、平均的な金融機関の規模という概念自体が成立しにくい裾野の広いものである（資産分布の計測時点は、前回の金融危機直前、米国では一九七九年末、日本では一九九〇年三月末とした）。

そこで、資産規模のヒストグラムの両対数グラフを作成すると、規模の最も大きい領域において、さらなるfat tailという不規則性はあるものの、日米両国において、基本的に直線の形状がみてとれる（図表1および2の(2)）。同様に、両国において、業態や、規模グループ、さらには、破たん金融機関（日米とも前回危機以降二〇〇七年末までの期間を対象）についても、直線上に並ぶ分布がみてとれる。これは、金融機関の資産の分布が冪分布となっていること、すなわち金融機関全体の構造をみたときに、それがスケール・フリー・ネットワークとなっていることを強く示すものである(注3)。

冪分布の特徴は、分布のどの部分をとってもその上下の値との関係が維持される、「スケール・フリー性」にある。これは、規模の大きい金融機関が広範囲に存在すること（fat tail）とも密接に関係している。数式では、スケール・フリー性、ないし冪分布は、

$$〔該当する金融機関の数(割合)〕=（金融機関の資産規模）^{-\gamma}$$

と表現され、γは冪指数と呼ばれる。なお、日米のデータからは、金融機関の資産分布の冪指数（両対数グラフの傾きの絶対値）は有意に3未満とみられるが、このことは後ほど重要な意味をもつ。

三、ネットワークの基本概念と金融システム

1　ネットワークの基本概念

金融機関の資産規模からみた金融システムの構造がスケール・フリー・ネットワークになっていることの意味合いはどのようなものであろうか。そこで、金融システムへの適用を念頭に置きながら、ネットワーク理論の概要を整理しよう。

一般に、ネットワークとは、空間に点在する結節点（以下、ノード、nodes）とそれを結ぶ繋がり（以下、リンク、links）のことである(注4)。静的な構造（topology）だけではなく、自己組織化限界（self -organized criticality）など時間の変化に伴う動的な事象も議論の対象となる。金融システムの場合（図表3、(1)）、金融機関をノード、取引関係をリンクとみれば、金融システム全体をひとつのネットワークとして捉えることができる。

そうしたネットワークの構造を表現する最も基本的な指標は、ノード毎のリンクの数（次数）とその分布（次数分布）である。次数という表現に最もなじむのは、リンクを一様、同質なものと想定したときであろう。しかし、各々のリンクに「重み」（weight）を割り当て、各々のノードに繋がるリンクの重みの合計を「強さ」（strength）と定義付けた、より現実的なモデル（重み付きネットワーク、weighted networks）も構築されてきている。

ネットワーク理論では、こうした次数や重みなどのほかに、ネットワークの性質を示す、平均ノード間距離（あるノードから別のノードに到達するのに必要な最小経由ノード数のすべてのノードに関する平均値）、中心性など、いくつかの重要な指標がある。図表3の下部点線で囲んだジャイアント・コンポーネント(giant component)とは、その範囲でネットワークが現に繋がっていることを示しており、これが存在する限りにおいて、そのネットワークは繋がりが維持されているという意味で、「機能している」と言える。これらの指標、概念はネットワークの性質に大きく関わっている。

2　ネットワーク理論からみた金融システム

金融システムをネットワークとしてみた場合、金融機関をノードとした上で、リンクをインターバンク取引に限定すると、直観的にも極めて自然な当てはめとなろう。現にそうした分析は既に行われている。しかし、金融システムの中でイ

ンターバンク取引は一部でしかなく、金融取引には顧客との間の預金や貸出、振込み、有価証券の売買など、様々な形態がある。そこでひとつの試みとして、

「金融機関の『取引』は、最終的に金融機関の資産に反映され『リンクの重み』となる。そして、金融機関の『総資産』は『ノードの強さ』となる。金融システムは、そのような『重み付きネットワーク』である」

と考えてみよう。このように想定するポイントは、次のとおりである。

（1）預金、貸出取引など、金融機関と顧客の間の取引関係は、あるノードとそれ自身をつなぐ自己リンクとする。その取引残高は、自己リンクの重みとなる。インターバンク取引の場合は、他のノードとのリンクであるが、取引残高をリンクの重みとみる点は同じである。

（2）他行への振込みの場合は、振込み元の金融機関にとっては預金残高の減少、振込先の金融機関にとっては、預金残高の増加などとなる取引であり、これも、最終的には金融機関の総資産に反映される。その意味で、振込などの決済取引も総資産（強さ）に一応反映される。もっとも、総資産残高が変化しない場合でも、フローとしての決済取引が大きいことがあるが、そうした状況は捨象される。

（3）フローとしての取引の大きさが総資産にストレートに反映されない、小さいポジション下での有価証券の売買取引などもあるが、その点も残念ながら捨象される。

要するに、総資産（ストック）に全ての取引関係の多寡（フロー）が直接影響するわけではなく、厳密には、決済や市場業務に特化した金融機関の存在などが正当に評価されないという問題はある。しかし、金融システムの構造的特徴の大枠を明らかにするという、ここでの目標からすると、またデータ面の制約なども考慮すると、以上のような割切りも許容されるのではないだろうか。そうした考え方に立って実証分析を行ったのが、先ほどの日米の金融機関の資産分布であり、それが現実に冪分布に従うことが示されたのである。

四、ネットワーク理論の概要

以下、次数や強さの分布を軸にネットワークに関する一般的な理論を整理していく。その見通しをよくするため、まず、ネットワークの類型について概観しておこう。なお、一般にリンクに関しては、方向性の有無を問題とする。たとえば、資金の流れに着目すると、預金は金融機関に資金が向かう取引であるのに対し、貸出は金融機関から資金が出ていくことから、方向性を論じる意味がある。しかし、ここでは最終的に金融機関の資産に着目した議論を行うので、方向性のないネットワーク（undirected network）を前提とする。

1　ネットワークの類型

ネットワークの中で、プロトタイプ的な位置づけとなるのは、すべてのノードが、同数のリンクで繋がっている格子である。その場合、次数分布は一点分布である。

「木」は、木の枝状に枝分かれしているネットワークである。作り方（成長の有無、仕方）により、冪分布を含め様々な次数分布を与えることができる。ただし、サイクル（3つ以上のノードを結ぶループ）が存在しない特徴がある。

ランダム・ネットワークは、(P. Erdös and A.Rényi, 1959) によって初めて本格的にモデル化されたもので、既存のネットワークに対して、ランダムにピックアップされたノードに逐次（毎期）リンク（ないしは、ノードとリンクのセット）を加えていくことによって形成されるネットワークである。その次数分布は、ノードへのリンクの有無だけによって規定されるので、二項分布に従う。また、ノードの数、つまりネットワークのサイズ（N）を増やしていくと、漸近的にポアッソン分布に従うのが特徴である。

次は、スモール・ワールド（SW）ネットワークである。典型例のひとつはサイクル状の一様なネットワークに対して、離れたノードを直接結び付ける高速道路のようなリンクに張り替えたり、新たに加えたりしたものである。(D.J.Watts and S.

H.Strogatz, 1998）によって最初にモデル化されたもので、次数分布は典型的にはポアッソン分布である。

以上のようなネットワークの類型に対して、（R. Albert and A-L. Barabási 1999）によって最初にモデル化された、成長（growth）と優先的選択（preferential attachment）を伴うネットワークは、その性質が上述の類型とはかなり異なっている。大きな特徴は、多数のリンクを持つハブ（hub）の存在と、次数分布が冪分布に従うことである。上述の通り、冪分布はスケール・フリーな分布であるため、この種のネットワークはスケール・フリー・ネットワークと呼ばれるが、ネットワークがフラクタル性を持つというような、トポロジカルな意味でのスケール・フリー性を一般に持っているわけではない。

2 スケール・フリー・ネットワークの理論モデル

さて、スケール・フリー・ネットワークは、いくつかの明確な特徴をもつネットワークである。その点を明らかにするため、ここでスケール・フリー・ネットワークを創出する単純なモデルを構築してみよう（モデルの導出に至る解析的な議論は解析編を参照、式の番号は共通)。

（1）単純な優先的選択、成長モデル

モデルの前提は次のとおりである。ある時点において、所与のネットワークが存在するものとする。その後各時点において、新たにm個のリンクが張られる。ただし、そのうち、既存のノードには合計q個の新たなリンクが張られ、残り$(m-q\geq 0)$は新たに加えられたノードが自ら携えてネットワークに参加する。q個のリンクは、各リンク(n)が各時点(t)で既に有しているリンク数k(n, t)と、定数Aの和に比例して張られるものとする（preferential attachment、優先的選択)。

$$q \propto k(n,t)+A \qquad \cdots \text{（イ）}$$

この場合、次数分布は解析的に

$$P(k) \propto k^{-\frac{m+A+q}{q}} \quad \cdots\cdots（ト）$$

で与えられ、優先的選択の下で成長するネットワークの次数分布は冪指数が$(m+A+q)/q$の冪分布となり、ネットワークはスケール・フリー・ネットワークとなる。優先的選択の度合いが強い（たとえばAがkに比して小さい）ほど冪指数は小さく、冪指数が小さいほど、分布の裾野が長くなり（fat tail）、ネットワークの性質としてはハブの存在が大きくなる。優先的選択の度合いが強いということは、繋がりの多いものがますます多い繋がりを持つわけであるから、これは当然の帰結である。

（ト）式の両辺の対数をとると、

$$\log p(k) = -\frac{m+A+q}{q}\log k$$

となるので、両対数グラフ上で、傾きが$-\left(\frac{m+A+q}{q}\right)$の直線となる。これにより、冪分布の存在を確認する手掛かりが得られる。実際、このことから先ほど日米のデータで冪分布となることが分かったわけである。なお、日米の金融機関の資産分布において、日本の方が米国よりも、また日本において協同組織金融機関よりも銀行の方が、さらに米国において最近の方が、それぞれ冪指数が小さいことから、その順序でハブ性が強いということ言えるかもしれないが、この点については、さらに慎重に検討する必要があろう。

（2）重み付きネットワーク

近年重み付きネットワークの研究が大きな成果を挙げてきている。その中のひとつのモデルの概要を(A. Barrat, M. Barthelemy and A. Vespignani, 2004)に沿って説明しよう（上記（1）の単純なモデルの前提に対して、次のように若干の簡略化

と追加的な定義を導入)。

① ノードnとノードjを結ぶリンクに、重み W_{nj} が付与される。

② ノードnの強さ s_n を $\sum_j W_{nj}$ と定義する。

③ 成長にあたって、つまりt期において新たなノードが付け加わるとき、既存のノード同士のリンクの創出は行われず、新しいノードとそこに繋がる重み付きリンク(m本)のみが導入されるものとする。その際、既存のノードが新たなリンクを持つ確率は、これまでのように次数に比例するのではなく、ネットワーク全体の中での相対的な強さ $s_n/\sum_j s_j$ に比例するものとする。なお、m本の新しいリンクそれぞれが持つ重みは常に $W_0 = 1$ とする。

④ 新たなリンクを持ったノードnの強さは、$W_0 = 1$ に加えて、さらにδだけ増加するとする(強いものはますます強くなるという前提)。すなわち、

$$s_n \to s_n + w_0(=1) + \delta$$

以上の前提の下で、最終的に次のような強さの分布が得られる。

$$P(s) \propto S^{\frac{4\delta+3}{2\delta+1}} \quad \cdots \text{(ヌ)}$$

これにより、成長と優先的選択を伴う分布は、次数を強さに置き換えても、冪指数が(4δ+3)+/(2δ+1)の冪分布であり、そのネットワークはスケール・フリー・ネットワークとなることが示された。δが大きいほど、冪指数が小さくなるので(冪指数をδで微分すると負)、強いものがますます強くなるという前提からして当然の結果が得られる。

五、金融システムがスケール・フリー・ネットワークとなる背景

以上の検討から、成長と優先的選択があると、そのネットワークはスケール・フリー・ネットワークとなることを解析的に示すことができた(実は、解析編でも触れたように、ネットワーク全体の成長を前提としなくても、優先的選択のメ

カニズムだけでもスケール・フリー・ネットワークが構築できる)。いうまでもなく、現実のネットワークは上述のような単純なものではないが、それでも、現実のネットワークがスケール・フリーとなっているということは事実である。そこで、現実の金融システムがスケール・フリー・ネットワークとなる背景が問題となる。この点については、次のような論点が指摘できる。

1 金融取引の規模・集積の利益

金融は、情報が重要な役割を果たす取引である。情報には集積のメリットがあると考えられる。たとえば、取引先の多い金融機関には取引先の業務提携のニーズなどの情報もより多く集まる。また、決済取引について考えると、充実した店舗網は、それ自体がより大きな顧客利便性をもたらす。このように金融システムには、「基盤の強さがますます基盤を強くする」面がある。このため、金融システムには、ハブ性を持つ相対的に少数のノードにリンクが集中するという、スケール・フリー・ネットワークの基本的な性質があるとみられる。なお、モデルの議論から明らかなように、スケール・フリー・ネットワークは、既存の強さに比例して、次の強さが生まれるということであり、必ずしも、その比例関係として加速度的なものを前提にしているわけではない。

2 金融取引の効率性

金融取引は、その品質が比較的均一な取引であるため、コストやスピードなどの効率性が重要である。この点、スケール・フリー・ネットワークは、同じ平均次数のランダム・ネットワークとの比較において、相対的にノード間の距離が小さいことが分かっている。すなわち、一般に平均ノード間距離は、ランダム・ネットワークの場合ネットワークサイズ(ノードの数N)の対数 LogN に比例し、スケール・フリー・ネットワークの場合は logN/loglogN に比例することが知られている。つまり、スケール・フリー・ネットワークにおいては構造的に繋がりの距離が短いことになる。また、実際には多くの重いリンクを持つハブを通じて各ノードが繋がっていることから、ノードからみるのではなく、リンクの数や

で加重平均した距離は、もっと短いともいえる。こうした意味での効率性の高さが、現実の金融システムをスケール・フリー・ネットワークにしている可能性がある。

3 「故障」などに対する抵抗力

冪分布が自然界、人間社会において ubiquitous に形成されていることはよく知られている。その理由のひとつとして、自然淘汰、ないしはある種の最適化の結果として冪分布が現れるという研究がある。最適化に関しては、インターネット網におけるルーター等の障害、森林火災、電力供給網の発電所事故への抵抗力をいかに高めるかといった「設計」の観点の一方、特にインターネットについて、頻繁に生じているルーターの故障にも関わらずネットワークとしての機能が何故「現実に」維持できているのかということを考えた場合、ある種の最適化が自ずと図られているのではないかという見方も出ている。この点、最近の研究では、ネットワーク崩壊の原因となり得る、後述の故障と攻撃の両方に対して、少なめの次数をもつ多数均一的なノードと少数のハブの共存が総合的な意味において強いネットワークであるとの研究成果もある(注5)。こうした観点からは、金融システムがスケール・フリー・ネットワークとなっているひとつの背景として、ネットワークをひとつの生命体とみた場合、繰り返される危機を経てなお全面的な崩壊には至らずに生き残ってきた結果、ある種の適者生存・自然淘汰の結果として、多数の小規模金融機関と少数の大規模金融機関の併存という構造に辿り着いたとの見方ができるかもしれない。あるいは、借り手や預金者にとって、取引先金融機関の破たんといった事態に直面しても、自らの経済活動に決定的なダメージを受けないように学習し、行動してきた結果がこのような金融構造を形成したのかもしれない。また上述の集積のメリットや効率性も、防御性と同じようなプロセスでスケール・フリー・ネットワークを形成するようになったとも考えられる。

六、スケール・フリー・ネットワークの特徴（頑健性を巡って）

スケール・フリー・ネットワークの最大の特徴は、多くのリンクや重いリンクと繋がっているハブの存在である。このことと関連して、ネットワーク理論では、金融システムのシステミック・リスクに関してヒントとなり得る、次のようないくつかの主張が提唱されている。

1　ノード除去に対する頑健性と脆弱性の共存（ショック型のシステミック・リスク）

スケール・フリー・ネットワークは、以下のような意味で、ノードのランダムな除去（一般に故障、error と呼ばれる）に対しては高い頑健性を有している。一方、次数が高いハブの選択的除去（一般に攻撃、attack と呼ばれる）に対しては弱いという欠点がある。なお、ランダム・ネットワークの場合は故障でも攻撃でも大きな相違はなく、スケール・フリー・ネットワークの場合と大きく異なっている(注6)。

(1) ネットワーク全体の平均ノード間距離およびジャイアント・コンポーネントのノード間距離は、大半のノードが除去されるような事態に至らない限り、故障の増加によってほとんど上昇しない。すなわち、多少の故障があってもネットワークの繋がりは維持され、当初の機能は破壊されない。

(2) ネットワーク全体の平均ノード間距離およびジャイアント・コンポーネントのノード間距離は、攻撃に対しては上位の極くわずかなノードの除去によって急激に上昇する。つまり、ハブがダメージを受けると、ネットワーク全体の繋がりが失われ、当初の機能は破壊的なダメージを受ける。

(3) ハブ同士の次数に関して類似性 (assortative correlation) がある場合には、(1)、(2)の傾向がますます強くなると考えられる。実際には、ハブ金融機関は、たとえば多数の取引先を通じて景気の影響を同じように受けることから、この点は重要である。

（故障とパーコレーションとの関係）

故障、つまりランダムなノードの除去に対する耐性は、パーコレーション理論によっても理解することができる。パー

コレーション(percolation)とは、ネットワーク全域への伝播による繋がり、たとえば情報の際限ない広まりのことである。そうしたパーコレーションが生じない確率は、木の形のネットワークを前提にすると(注7)、次数の平均($\langle k \rangle$)の2次モーメント($\langle K^2 \rangle$)に対する比率に比例することが知られており、$\langle K^2 \rangle$が発散するときは、その比率はゼロとなって、必ずパーコレーションが実現する。このことは、見方を変えれば、ほぼ全てのノードの繋がりが維持されることになる。このため、パーコレーションを情報の伝播ではなく、金融取引の繋がりと観念すれば、$\langle K^2 \rangle$が発散する限り、金融取引の繋がりは維持されることになる。この発散の条件は、スケール・フリー・ネットワークの場合、冪指数が3未満の場合は常に満たされる(冪分布の場合、$P(K) \propto K^{-\gamma}$であることから容易に確かめられる)。実際、日米のデータでは金融システムの冪指数は有意に3を下回っているので、金融ネットワークは、故障に対しては頑健である。つまりハブ性を持たない金融機関の破たんがあっても、信用仲介その他、全体としての金融システムの機能は維持される可能性が高い。

(攻撃と中心性の関係)

ところで、スケール・フリー・ネットワークにおいては、媒介性による中心性(betweenness centrality、任意の二つのノードを選んだ場合に、それを繋ぐ最短経路上のノード・リンクのうちの、ある個別のノードが経由される頻度)と次数はある種の比例関係にあることも分かっている(J. D. Noh and H.Rieger, 2004)。したがって、次数が多いという意味でのハブは、媒介性による中心性の意味でもネットワークの重要な位置を占めるノードである。そうしたハブが除去されれば、つまり金融システムの中核にあるような金融機関が機能不全に陥れば、ネットワーク全体が機能不全に至ることになるのは当然のことである。

(ハブ防御の重要性)

以上の議論から、金融システム全体の機能は、多くの金融機関が属する比較的規模の小さな領域にある金融機関の相対的に多めの数の破たんによりも、ハブと呼ばれる取引の集中している規模の大きい金融機関の少数の破たんによって損な

われる蓋然性が高いということになる。しかも、現実にはハブ同士の類似性、相関があるため、その傾向はますます強まる。巨大なネットワークの核となるあるハブ金融機関の破たんを回避するため、あるいは破たんしたとしてもその機能が維持されるよう、いくつかの内外の金融危機において、金融当局は資本注入や一時国有化などによりハブ金融機関の機能停止を回避しようとした。このことは、スケール・フリー・ネットワークを維持する観点に立って、ハブを防御しようとしたと観念できるかもしれない。

(中央銀行の中心性)

この点に関連して、中央銀行について触れておきたい。日米の資産分布に用いた総資産データには、金融機関の一般の取引先と同様の扱いで、中央銀行に対する資産(準備預金等)や負債(借入れ等)も含まれている。そうした資産・負債の規模の点からすると、メガ民間金融機関と比較して、少なくとも通常時は中央銀行のプレゼンスが特に大きいわけではない。

しかしながら中央銀行は、金融機関のネットワークの中では極めて中心性の高い特別な存在である(central bank の centrality)。中央銀行は、当座預金等を通じて為替尻の決済など金融機関の間の資金取引を媒介するとともに、必要に応じ直接の取引相手となって、金融調節を行い最後の貸し手機能を発揮する。その意味では、ハブ性を持つ金融機関にとっても、さらにそのハブの役割を果たしているといえる(いわば、「ハブのハブ」)。そうした機能を有する中央銀行は、財務的に破たんしないことが保証されている存在でもある。ハブのハブとして、それが機能停止することは許容されないからである。また、中央銀行がシステムダウン等の故障や、何らかの攻撃の対象となる事態も避けなければならない。

ハブのハブとして、中央銀行は金融機関の取引先とも短い距離で繋がっている。このため、信認の低下などから民間金融機関の機能が極端に低下する金融危機時には、中央銀行が民間金融機関の勘定を通じて一般事業法人に流動性の供給を行うことがあるが、これもハブのハブとしての位置付けからくるものと考えられる。

2　連続的な外的ストレスに対する自己組織化限界（逐次波及型のシステミック・リスク）

上記の1においては、ランダムにノードを除去していくか、ないしは次数の高い順にノードを逐次除去していくという前提で、ネットワークの頑健性、脆弱性を考察した。しかし、現実のネットワークにおいては、当初の故障ないし攻撃の対象となるノードはランダムな選択を含め外部要因で決まるとしても、その後の故障や攻撃の対象となるノードの選定（波及）は内生的なプロセスを辿ることが想定される。

解析編で述べているように、一定の前提のもとで、こうした波及プロセス自体の分布が冪性を有することが分かっている。すなわち、スケール・フリー・ネットワーク上で、何らかのストレスが与えられ、そのストレスがたとえば次数に比例する一定の上限値（閾値＝$K^{1-\eta}$）に達すると自身は崩壊し、そのノードのリンクや強さは近隣のノードに移転するとする。そしてそのプロセスは、すべてのノードが閾値以下に収まるようになった段階で終結するとしよう。そのようなプロセスを考えた場合、崩壊する一連のノードの次数の合計、崩壊過程の期間、崩壊過程一段落後のネットワークの各々がもともとのネットワークの次数分布の冪指数と上記ηによってのみ規定される冪分布に従うことが、数値計算だけではなく解析的にも一定の前提の下で明らかになってきている(D.-S. Lee, K.-I. Goh, B,Kahng and D.Kim, 2004)(注8)。一般にこうした一連のプロセスは、P. Bak (P Bak, 1996) などによって、自己組織化限界（self-organized criticality）として提唱されてきたものである。ここでのひとつのポイントは、閾値を超えて溢れ出たリンクやそれに付随した強さが、周辺に移転することである（conservation）。この点が、病気の感染や情報の広がりのように、何らかの量が移転することなく単純に伝わる場合と基本的に異なるところである。

金融危機においては、資産の一定割合を超えるストレス（たとえば不良資産の増加によるロス＝資本の毀損）により一部の金融機関が破たんすると、その悪影響が他の金融機関、ひいては金融システム全体に波及することが懸念される。1で述べたノード除去がショック型のシステミック・リスクとすれば、今述べたのは不良債権増加型のシステミック・リスクとも言えるかもしれない。また、たとえば不良資産の増加圧力というものが継続的に存在するとすれば、その限りでは、

冪性をもって金融危機は繰り返すことにもなり得るが、そこまでの含意をここで導くことは適当ではないであろう。

3　情報の広がり方の問題（信用不安波及型のシステミック・リスク）

先程も触れたように、ネットワーク上の情報の伝わり方については、近年様々な研究がある。特に、格子、スモール・ワールド・モデル、ランダム・ネットワークに関しては、各モデルに即して一定の閾値が存在し、それを超える時点で、雪崩的に情報が急速に広まることなどが知られている。個人から個人への情報の伝達をイメージすると、敢えて、スケール・フリー・ネットワークを前提にする必然性は乏しいかもしれない。また、マス・メディアのような存在をどう考えるかという、理論的に厄介な点もある。

しかし、金融に関する情報について考えた場合、それは取引に付随して生産され、伝達される面があることも事実であろう。そうすると、金融システムにおける情報の流れは、スケール・フリー・ネットワーク上で動いていくことになる。そして、この問題の最も本質的な部分は、実は上述のノード除去に対する頑健性に関する議論、その根拠となったパーコレーションの議論と同じである。信用不安の伝播は金融機関取引を通じた情報の伝播と捉えれば、こうした議論を信用不安波及型のシステミック・リスクになぞらえるのもひとつの考え方かも知れない。

その場合、先ほどの議論と同様に、金融システムのように冪指数が3未満のスケール・フリー・ネットワークにおいては、信用不安の噂を含めて情報は、際限なく広がってしまうことになる。しかも最近の研究では、その伝播のスピードも$\langle K^2 \rangle$に比例する(M. Brthelemy, A. Barrat, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, 2004)。このため、$\langle K^2 \rangle$の値が発散するスケール・フリー・ネットワークである金融システムの場合は、特にランダム・ネットワークとの対比において、信用不安が一部で生じると一気にそれが大きく広がることを防ぐのは非常に困難であることを意味する。つまり、リンクの数を取引の数ないし取引先の数と観念すると、情報の伝播、それに伴う取引変更などの伝染が一気に生じる、典型的な信用不安の連鎖の状況を示唆している。

おわりに

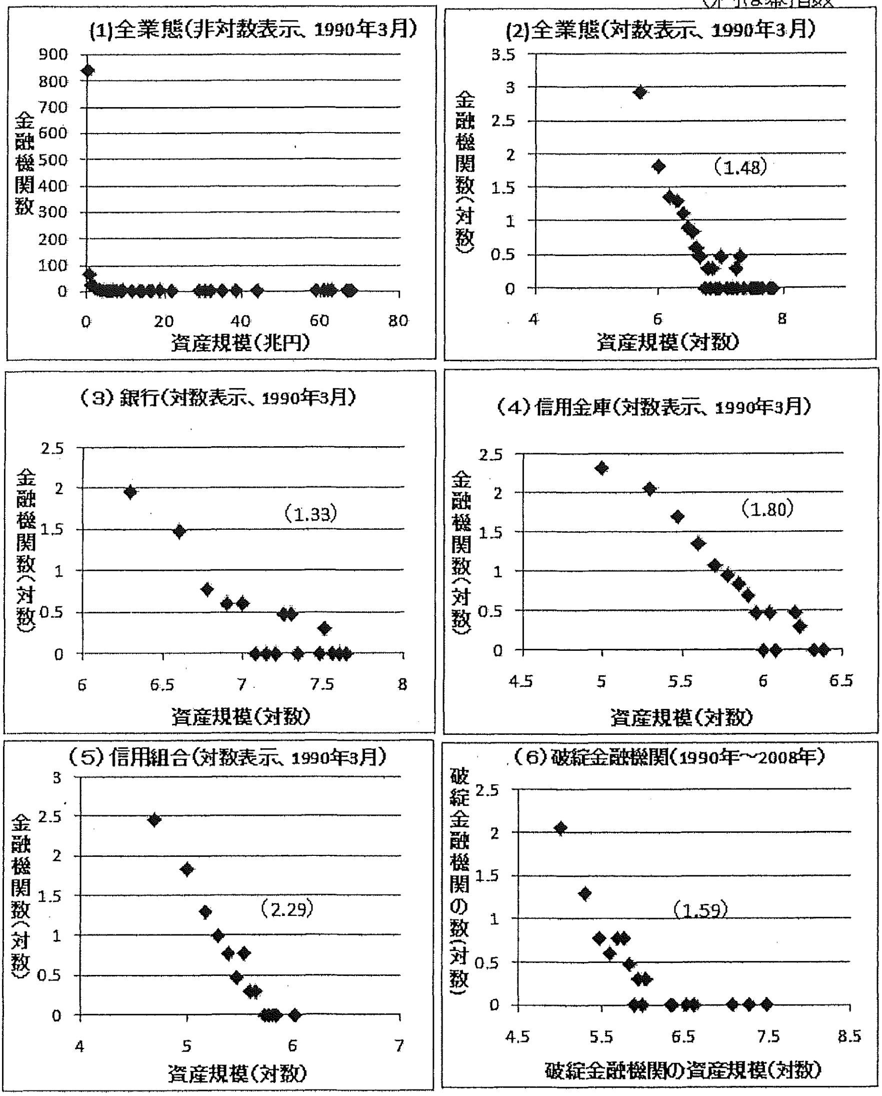
以上のように、金融システムがスケール・フリー・ネットワークとしての性質をもつということが分かると、スケール・フリー・ネットワークが一般に有する性質から逆に金融システムの特質を考察する手掛かりが得られる。

すなわち、金融システムは、①(単に規模が大きいだけではなく、繋がりが多い)ハブの破たんに脆弱である、②継続的な外部からのストレスがあると、ある時点から一連の連鎖が始まる、③信用不安は速いスピードで伝播する可能性がある、という意味でシステミックなリスクに脆弱だと考えられるということである。

本稿では、ネットワーク理論の金融システム論への適用の可能性を探求した。荒削りではあるが、その可能性をある程度示し得たのではないかと思う。ネットワーク理論はまだ発展途上である。一方、金融取引、金融システムの構造も変貌を続けている。今後、ネットワーク理論の知見も活用しつつ、マクロ・プルーデンス政策を巡る理論的な研究が深まることを期待したい。

図表１．　金融機関の資産分布（日本）

―（）内は冪指数―

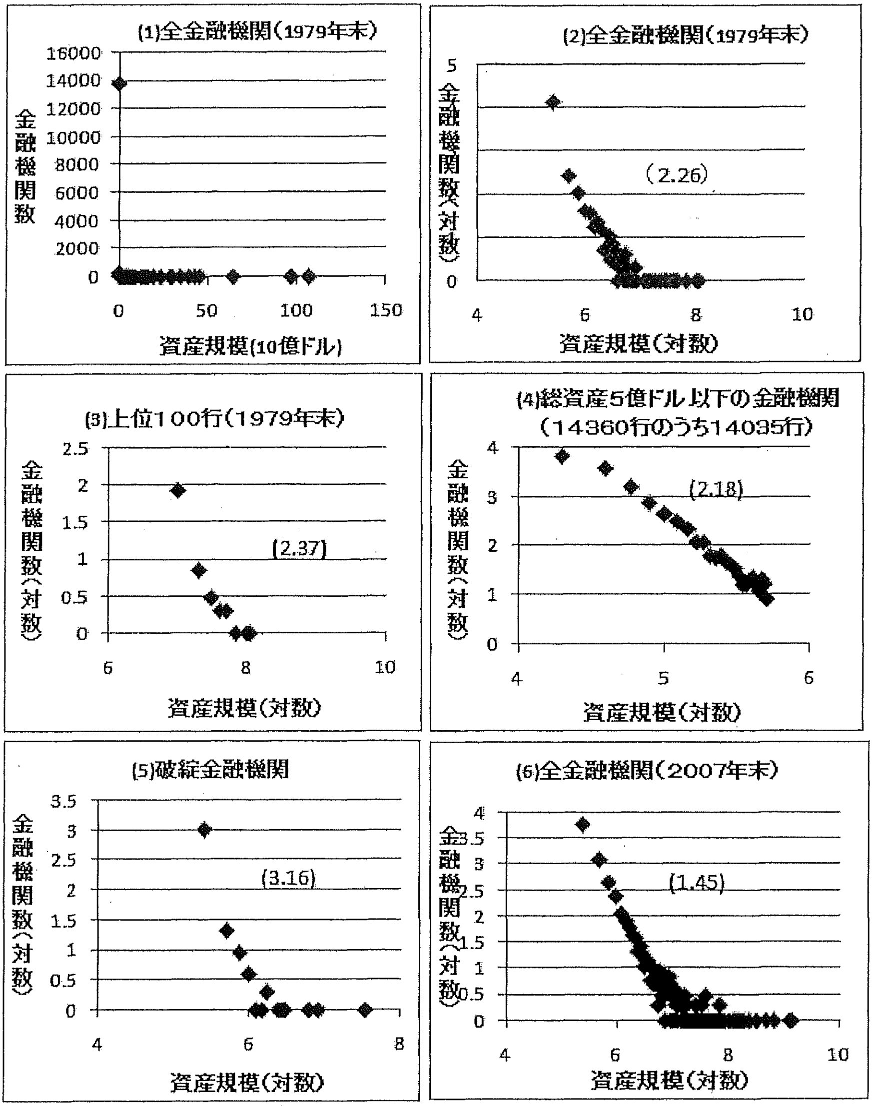


（データ出所）

銀行は、日経 NEEDS Financial QUEST と各金融機関の HP。信用金庫、信用組合は金融図書コンサルタント社の全国信用金庫財務諸表、全国信用組合財務諸表。

図表２．金融機関の資産分布（米国）

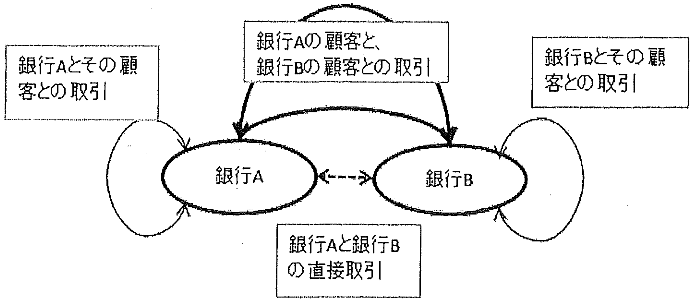
―( )内は冪指数―



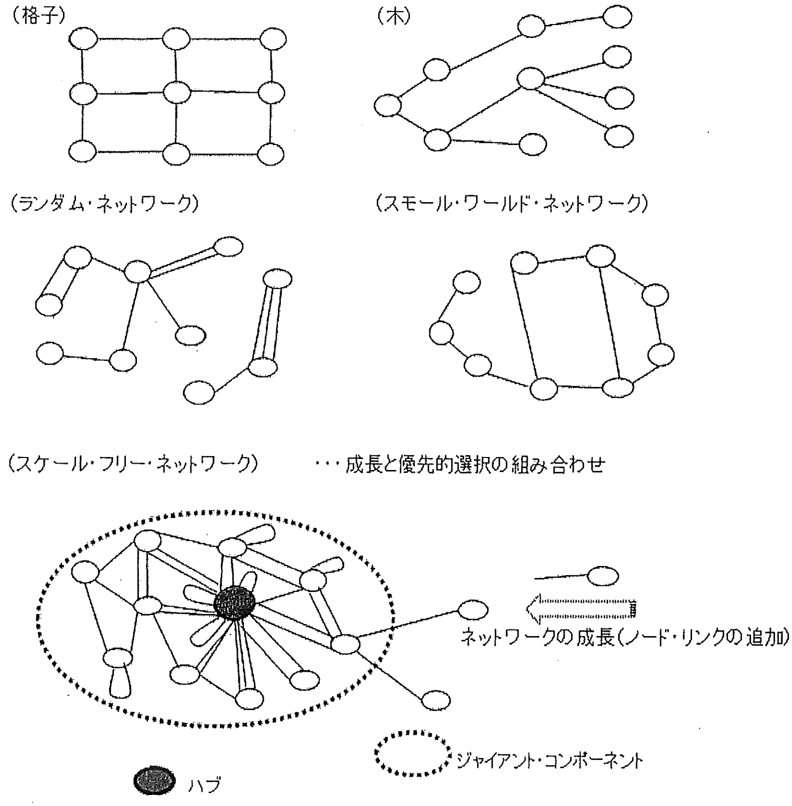
（データ出所）米国 FDIC の HP。

図表３．ネットワークのイメージ

(1) 金融機関取引のイメージとその類型



(2).ネットワークの一般的な類型



（解析編）成長と優先的選択を組み込んだネットワーク

（はじめに）

ここでは、成長と優先的選択を前提とすると、ネットワークの次数分布が冪分布となることが解析的に確認できることを示す。そうした冪分布が得られるモデルを初めて構築したのは、（R. Albert and A-L Barabási, 1999）である。彼らは、いわゆる連続体理論（continuum theory）によってモデルを組み立てたが、その後異なるアプローチで同様の結果が得られている。すなわち、いわゆるマスター方程式（master equation）によるモデル化が（S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin, 2000）によって、また比率方程式（rate equation）によるモデル化が（P. L. Krapivsky, S. Redner, and F. Leyvraz, 2000）によって行われた。以下では、（S. N. Dorogovtsev and J. F. F.Mendes, 2003）28〜29ページに基づき、成長（growth）と優先的選択（preferential attachment）下でのノードの次数分布を、連続体理論を用いて、リンクに方向性のない（undirected）、壺モデルと呼ばれる方法で求める（ただし、いくつかの点で原典を拡張している）。なお、ここでは直観的な方法による導出を試みることとし、数学的な厳密性は犠牲にしている。

一、優先的選択と成長を組み込んだネットワークの次数分布

1　前提

ある所与の初期状態、例えばひとつのノードのみで構成される状態スタートして、単純に次のような形で逐次リンクが張られていく。

① 各期（$t=1,2,3,,,n,,,$）において、ノード（壺）が1だけ加わる（成長）。各ノードはそれがネットワークに加えられた時点nによって特定される。

② 各時点において、新たにm個のリンクが張られる（壺に球が入れられる）。ただし、そのうち、既存のノードにはq

個の新たなリンクが張られ、残り（$m-q \geqq 0$）は追加されるノードが自ら携えてネットワークに参加する。さらに、q 個のリンクは、各リンク（n）が各時点（t）で既に有しているリンク数 $k(n, t)$ と定数 A の和（持ち点）に比例して張られるものとする（優先的選択）。

$$q \propto k(n,t)+A \cdots\cdots\text{（イ）}$$

2　優先的選択の具体的な展開

（イ）により、時点 t でノード n に新たに繋がるリンク数は、新たに加わるリンクの数の合計 q に、時点 t におけるすべてのノードの次数の合計 $\sum_{u=0}^{t}[k(u,t)+A]$ に対する点 n の持ち点のシェアを乗じたものと考えてよいから、時点 t における点 n に加わるリンク数は、

$$q\frac{[k(n,t)+A]}{\sum_{u=0}^{t}[k(u,t)+A]}=q\frac{[k(n,t)+A]}{(m+A)t}$$

となる。これを連続的な時間を仮定して書き直すと、

$$\frac{\partial[k(n,t)+A]}{\partial t}=q\frac{[k(n,t)+A]}{(m+A)t}\cdots\cdots\text{（ロ）}$$

となるが、この解は、

$$k(n,t)+A=\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{-q}{m+A}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（ハ）}$$

で与えられる。

3　次数分布の導出

t 時点における次数の分布 P (k, t) は、次数が単位数だけ増えた場合に、どれだけその次数を持つノードの数が増加数（実際には減るので次の式で負符号が登場する）をノードの数全体（t）との対比することであるので、次の式で与えられる（連続体理論）

$$P(k,t) = -\frac{1}{t}\frac{\partial n(k,t)}{\partial k} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{（ニ）}$$

そこで、（ハ）から n を求めると、

$$n = \left[t^{\frac{-q}{m+A}} \cdot (k+A)\right]^{-\frac{m+A}{q}} \cdots\cdots\cdots \text{（ホ）}$$

となるので、（ニ）に即して、計算すると

$$P(k,t) = \frac{m+A}{q} \cdot t^{\frac{q}{m+A}} \cdot (k+A)^{\frac{-m+A+q}{q}} \cdots \text{（ヘ）}$$

が、得られる。（ヘ）式の k に注目すると、成長と優先的選択の下でのネットワークの確率分布が得られる。

$$P(k) \propto k^{-\frac{m+A+q}{q}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{（ト）}$$

4　Albert-Barabási モデルとの関係

もともとの Albert-Barabási モデルでは、各時点においてリンクが2ずつ加えられるが、既存のノードに繋がるのは1のみであるので（両端付きのリンクの片方が既存のノードと、もうひとつが新たなノードと繋がっている）、m＝2、q＝1である。また、優先的選択は既存のノードの次数に単純な比例関係を想定しているので、A＝0 である。これらを、（ト）に代入すると、ここで導出した特殊なケースとして、バラバシ Albert-Barabáasi モデルの冪指数 $\gamma = 3$ が得られる。

$$P(k) \propto k^{-3} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{ト})'$$

二、成長なしでリンクの付け替えが行われるケース

時間の経過とともにノードが新たに加わる一方で、加わったと同じ数だけのノードが消滅（これにともなって、リンクも消滅）する非成長モデルを考えてみよう。さらに、既存のノードにはリンクは新たに付け加えられず、既存のノードの平均次数〈k〉に等しい次数をもった新たなノードが登場するとしよう。ただし、新たなリンクはこれまでと同様の優先的選択に従うものとしよう。この場合、上述の計算過程からも推測できるように、（ト）において、$m=q=\langle k\rangle$ とおいた、冪指数 $\gamma=2+A/\langle k\rangle$ の冪分布が得られる。すなわち、全体としてネットワークの成長が止まり、ノードやリンクの数が増えない場合でも、優先的選択のメカニズムがあれば、スケール・フリー・ネットワークが形成されるのである。

三、優先的選択のないケース

優先選択のないケースは、式（イ）に替えて、$q \propto A$（一定）として、既存のノードへのリンクの追加が既存のノードの次数に左右されないと前提すればよいから、式（ロ）は

$$\frac{\partial k(n,t)+A}{\partial t} = \frac{qA}{(m+A)t} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{ロ})''$$

となり、境界条件 $k(n,n)=m-q$ 用いて得られた解

$$k(n,t) = \frac{qt}{m+A}(\ln t - \ln n) + m - q$$

を n に関して解いた

$$n = t \cdot e^{\frac{(-k+m-q)(m+A)}{qA}} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{ホ})''$$

を、（三）に代入すると、

$$P(k,t) = \frac{1}{qA} \cdot e^{\frac{(m-q)(m+A)}{qA}} \cdot e^{\frac{-k(m+A)}{qA}} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{八})"$$

から、最終的に次のような指数分布が得られる。

$$p(k,t) \propto e^{\frac{-k(m+A)}{qA}} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{ト})"$$

すなわち、優先的選択の前提を落とすと、成長するネットワークの次数分布はもはや冪分布ではなく、指数分布となるのである。このように、冪分布をもたらすネットワークの生成には優先的選択が強く関わっていると考えられる。

四、重み付きネットワークの次数、強さ、重みの分布

ここで、リンクに重みが与えられるケースに関して関連変数の確率分布を求めてみよう。以上の議論では、各リンクは無差別であると前提していた。つまり、各ノードからすると均一なリンクが何本張られているかどうかのみが問題であり、どのようなリンクが張られるかどうかは問われていなかった。しかしながら、実際のネットワークを見ると、この前提はやや非現実的である。金融機関から見ると、取引先があるかどうかだけが問題なのではなく、どのような取引ができるかが問題なのである。こうしたことから、近年「重み付きネットワーク（weighted network）」の研究が重ねられてきた。そこで、以下主に[Alain Barrat, 2004]に従って、各リンクに固有の数値＝(weight) と各ノードにそのノードと繋がるリンクの重みを合計した値＝強さ（strength）を与えた場合のネットワーク＝重み付きネットワークの性質を示してみよう。

1　前提等

基本的には一、1の前提等を踏襲するが、次の追加的な定義と前提を導入する。

① ノードnとノードjを結ぶリンクには、W_{nj} が付与される。

② ノードnの強さは、$\sum_j w_{nj}$ と定義する。

③　成長にあたって、つまりt期において新たなノードが付け加わるとき、既存のノード同士のリンクの創出は行われず、新しいノードとそこに繋がる重み付きリンク（m本）のみが導入されるものとする。その際、既存のノードが新たなリンクを持つ確率は、これまでのように次数 $[(k_n/\sum_j k_j)+A]$ に比例するのではなく、ネットワーク全体の中での相対的な強さ $s_n/\sum_j s_j$ に比例するものとする。その際m本の新しいリンクそれぞれが持つ重みは常に $W_0 = 1$ とする。

④　新たなリンクを持ったノードnの強さは、$W_0 = 1$ に加えて、さらに δ だけ増加するとする（強いものはますます強くなるという前提）。すなわち、

$$s_n \to s_n + w_0(=1) + \delta$$

なお、既存の各リンクに着目すると、その重みは $w_{nj} \to w_{nj} + \Delta w_{nj}$ と変化するが、その変化は、

$$\Delta w_{nj} = \delta \cdot w_{nj}/s_n$$

で与えられる。

2　重み付きネットワークの関連分布の導出

以上の前提から、強さsと次数の変化は、次の式で与えられる。

$$\frac{ds_n}{dt} = m\frac{s_n(t)}{\sum_j s_j(t)}\cdot(1+\delta) + \sum_{n\in\theta} m\cdot\frac{s_n(t)}{\sum_j s_j(t)}\cdot\delta\cdot\frac{w_{nj}(t)}{s_n(t)}$$

ただし、θ は新たにリンクを得たノードの集合

$$\frac{dk_n}{dt} = m\frac{s_n(t)}{\sum_j s_n(t)}$$

これらから、

$$s_n(t) = mg\left(\frac{t}{n}\right)^{(2\delta+1)g(2\delta+2)}$$

$$k_n(t) = \frac{s_n(t) + 2m\delta}{2\delta + 1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (チ)$$

が得られ、次数、強さ、重みの確率分布は次の式で得られる（これらの式の導出については、前掲 [Alain Barrat, 2004]を参照）。

$$P(k) \propto k^{-\frac{4\delta+3}{2\delta+1}} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (リ)$$

（チ）式によりkとsは一次の関係にあるので、両者の確率分布は同一なるから、結局

$$P(s) \propto s^{-\frac{4\delta+3}{2\delta+1}} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (ヌ)$$

が得られる。また、重みについては、次の通りとなる。

$$p(w) \propto w^{-(2+\frac{1}{\delta})} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (ル)$$

3　重み付きネットワークの分布の意味

重み付きネットワークの分布は解析的には以上のとおりであるが、重みなしのネットワークの比較でいくつか指摘しておこう。

（イ）式において、$\delta = 0$ つまり、新たに加わったノードが既存の重みに影響しないとすれば、単にリンクの数＝次数の増え方が変わるだけであるので、本質的には重みの意味がなくなり、従前の優先的選択を組み込んだ成長モデルと同じことである。実際、その場合、（リ）式は

$$P(k) \propto k^{-3}$$

となって、(ト)、と同じ式が得られる。

いずれにせよ、重み付きのネットワークでも、優先的選択が組み込まれる限り、リンクの数の多いものはますますリンクの数が多くなると同様に、強いものはますます強くなるという本質的に同じ性質が得られるのである。

適合度モデルと呼ばれる類似のモデルもある。重み付きモデルは、重み付き分布のノードの強さがそのノードに繋がるリンクの持つ重みの合計で決まり、それに依存して強いものがますます強くなるモデルであったが、適応度モデルの場合、ノードの強さが確率的に与えられると考えて（その場合、強さの代わりに適合度と呼ぶ）、ある時点におけるノードの次数分布を

$$P(k) \propto k^{-\gamma} \qquad \gamma = \frac{c}{\eta} + 1$$

であることを示すものである。また、ノードが新たなリンクを得る確率が二つのノードの強さの合計に依存する「閾値モデル」と呼ばれるものもある。この場合も、強さの分布をある分布と仮定した場合に、冪分布をもたらす場合があることが報告されている。たとえば、強さが指数分布で与えられる時に、最終的にノードの次数分布が冪分布で与えられることが分かっている。つまり、

$$f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$$

で与えられる時に、

$$p(k) = \frac{Ne^{-\lambda\theta}}{k^2}$$

で与えられることが分かっている。ここでNはネットワークの大きさ（ノードの数）である。これらのモデルの金融システムへの適用も考えられるが、適合度モデルは、ノードの強さが直接確率的に与えられる点で金融システムとの親和性が問題となり得る。「閾値モデル」は、やや特殊な前提であると同時に一般的な前提の下では解析的に分布を導出することが

困難である。このため、本稿では一般的な重み付きネットワークモデルを適用した。

五　自己組織化限界モデル

ここでは、金融機関の連鎖的破綻のひとつのモデルになり得るものとして、スケール・フリー・ネットワーク上での砂山モデル（sandpile avalanche）を提示することとし、(D.-S. Lee, K.-I. Goh, B, Kahng and D. Kim, 2004) による、スケール・フリー・ネットワーク上の砂山モデルの avalanche の分布の導出を紹介する。

1　前提

もともとのネットワークの次の性質を持つ。

次数分布、$p(k) = k^{-\gamma}(\gamma \leq 3 - \eta)$、各ノードiの閾値は $z_i = k_i^{1-\eta}$ $(0 \leq \eta \leq 1)$

毎期ランダムにピックアップされたノードに対して、値1の粒が加えられ。それにより、ピックアップされたノードiの高さは1高くなる。それによって、高さが閾値を超えたときは、そのノードは雪崩（avalanche）を起こして崩壊し、それが持っていた次数=高さは、ランダムにピックアップされた近隣のノードに移転する。移転先のノードは1だけ高くなり、それによって、閾値を超えるときは、同じプロセスで自らは崩壊し近隣のノードに粒を移転する。

以上のプロセスは全てのノードが粒の移転を受けることによって崩壊することがない状態に落ち着くまで継続する。また、粒の移転は独立的に行われる（相関もサイクルも生じない）。

こうしたプロセスを不良資産問題から生じるロスによって金融機関が破たんし、その連鎖が近隣の金融機関に及ぶものと例えると、閾値は最低自己資本比率となぞらえることもできる。

2　結論

雪崩全体の大きさ（avalanche size）、プロセスの継続期間、崩壊後のネットワーク全体の次数分布は、いずれも冪分布と

なり、各々の冪指数を τ、δ、γ とすると次の式で与えられる。

$$\tau=(\gamma-2\eta)/(\gamma-1-\eta),\quad \delta=(\gamma-1-\eta)/(\gamma-2),\quad \gamma'=3-\eta$$

以上からは、このプロセスを金融危機になぞらえた場合の、危機の規模、期間などについての詳細な含意が一応解析的に得られるが、このモデルはかなり強い前提を置いていること、冪指数等の推定に当たって統計的に安定、正確な指数を得ることはかなりの困難を伴うことから、本稿ではそこまで立ち入っていない。また、重み付きネットワークに関しても、数値計算による同様の研究があるが、ここでは立ち入らない。

---

1 このコンファランスについては、"New Directions for Understanding Systemic Risk" (the National Academy of Science 2007) と題する報告書が出版されている。

2 **F. Allen-A. Babus** の論文（出版予定の Network-based Strategies and Competencies edited by Paul Kleindorfer and Jerry Wind to be published by Wharton School Publishingの21章、事前論文が ssrn.com で入手可能）では、金融システム論へのネットワーク理論への応用について、"In the context of financial systems, the nodes of the network represent financial institutions, while the links are created through mutual exposures between banks, acquired on the interbank market by holding similar portfolio exposures or by sharing the same mass of depositors." と述べて、その有用性を説明している。

3 両対数グラフで直線的になる部分があるという意味では、対数正規分布などもあり、注意深さが必要であるが、ここでの全体的な議論、グラフの形状から見て、冪性の存在については問題がないと考える。ただし、子細に見ると資産規模が最大の範囲において、マイナスの角度を失い水平になっている。この理由を断定することは困難であるが、単純なデータの制約の問題のほか、金融システムの場合、通常の冪分布で想定される規模を上回る極めて強大なハブの存在が確認されたとも考えられる。空港（ノード）の発着量（リンク）などに関して、巨大化から発生するコスト制約から、冪分布の右側の領域において急角度で減衰する例が報告されている (L. A.N. Amaral, A. Scala, M. Barthemy and H. E. Stanley, 2000)。しかし、ここでの金融機関の資産分布の場合、グラフから見る限り、逆に冪分布の右側においてさらにfat-tail化がみられている。これは、金融資産の場合、規模に関してコスト逓減が加速するといった事情が働いている可能性がある。ただし、「強いものがより強くなる」ということでの基本的な観察とは矛盾しない。

なお、冪指数の算出に当たっては、そうした規模域を除いて（実際には、ヒストグラム上1個のデータしか存在しない場合を除いて）回帰分析により算出した。より厳密な統計処理の観点からは最尤法を用いるべきであるとの指摘が多いが、ここでは、第一次接近として、簡便な回帰分析を採用した。ただし、その決定係数、t値はいずれも十分に高かった。

4　ノード（nodes）と同じ意味で頂点（vertices）、サイト（sites）、行為者（actor）という用語が用いられることも多い。同様に、リンク（links）についても、枝（edges）、ボンド（bonds）、紐帯（tie）、弦（arc）などの用語も用いられる。ネットワーク（networks）についても、特に数学では、グラフ（graphs）が一般的である。また、複雑ネットワーク（complex networks）という用語が使われることも多いが、ここでは、単純にネットワークという用語を用いることにした。ネットワーク理論は新しい分野であり、英語、日本語いずれにおいても、社会学、生物学などの応用分野や数学、物理などの基礎分野の違いによって異なる用語法が用いられているが、ここでは、特に social network の分野で、おそらく最も一般的な用語であるノード、リンクを採用した。なお、ノードが有するリンクの数を示す「次数」については、原語では degree の他に、connectivity という用語もあるが、日本語では次数ということが多いので、ここでもその用語法に従う。

5　スケール・フリー・ネットワーク上での最適化過程を検討した（J. M. Carlson and J Doyle, 1999）、それに危険回避度などの主観的な判断基準を導入した（M. E. J Newman, M Girvan, and J. D. Farmer, 2002）のほか、故障に攻撃にも強いネットワークとして2極分布の有用性を提唱している[谷澤　俊弘, 2008]などを参照されたい。

6　(1)、(2)の結果は、実証的にも、解析的にも明らかにされている。この問題を初めて実証的に示したのは、（R. Albert, H. Jeong, and A-L. Barabási, 2000）であるが、解析的には（R.Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin, 2000,2001）によって明らかにされた。ただし、解析的にこの主張が証明されているのは、厳密にはサイクルや自己リンクがない前提の場合である。なお、解析編の冪分布を導出する過程では、いわゆる壺モデルによっているため、サイクルや自己リンクも許容している（金融システムの場合、その方が実態には即していると考えられる。）

7　ネットワークが木の形をしていることはかなり強い前提のようにみえる。しかし、大きなネットワークを想定すると、ジャイアント・コンポーネントの外周部分は、木の形をしていると前提しても、極端に現実離れしているわけではない。

8　スケール・フリー・ネットワーク上において一連のノードが冪性を持って崩壊した後のネットワーク自体も再びスケール・フリー・ネットワークとなることは直感的にも十分想定される。そうでない限り、スケール・フリー・ネットワークの冪性が維持されないこととなり、実際のネットワークの多くがスケール・フリー・ネットワーク出ることと矛盾するからである。実際、冪分布の加除の分布も冪分布となることも明らかにされている（C. Wilke, S. Almeyer and T. Martinetz, 1998）。

［参考文献］・・・日付順

P. Erdös and A.Rényi On the Evolution of Random Graphs, 1959, in reprint（*The stucture and dynamics of Networks,* M Newman A-L Barabási D. J. Watts eds., Princeton Univ. Press , 2006,. pp38-81)

P. Bak, *How nature works : the science of self-organized criticality*, Springer Verlag NY, 1996.

C.Wilke, S.Almeyer and T. Martinetz, Large-scale evolution and extinction in a hierarchilcally strucured environment, in arXiv:adap-org / 9803001v1, March 1998.

D .J. Watts and S. H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, in Nature, Vol. 393, No.4, June 1998, pp. 440-442.

J. M. Carlson and J. Doyle, Highly optimized tolerance: A mechanism for power laws in designed system, in Physical Review E, vol. 60, Number 2, August 1999, pp. 1412-1427.

R. Albert and A-L Barabási, Emergence of Scaling in Random Networks, in Science, Vol286, October 1999, pp. 509-512.

S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin, Structure of Growing Networks: Exact Solution of the Barabási-Albert's Model, in arXiv : cond-mat / 0004434v1, April 2000.

R. Albert, H. Jeong, and A-L. Barabási, Error and attack tolerance of complex networks, in Nature, Vol.406,No 27, July 2000, pp. 378-381.

L. A.N. Amaral, A. Scala, M. Barthemy and H. E. Stanley, Classes of small-world networks, in The Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol.97, No21, September 2000 pp. 11149-11152.

R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin, Resilience of the internet to random breakdowns,in Physical Review Letters, Vol. 85, No21, November 2000, pp. 4626-4628.

P .L. Krapivsky, S. Redner, and F.. Leyvraz Connectivity of growing random networks, in Physical Review Letters, Vol. 85, No21, November 2000, pp. 4629-4632.

R. Cohen, K.Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin, Breakdown of the Internet under Intentional Attack, in Physical Review Letters, Vol. 86, No16, April 2001, pp. 3682-3685.

M. E. J Newman, M Girvan, and J. D.Farmer, Optimal Design, Robustness, and Risk Aversion, in Physical Review Letters, Vol89, June 2002, p. 028301(1-4).

S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Evolution of Networks* , Oxford Univ. Press, 2003.

D.-S. Lee, K.-I. Goh, B, Kahng and D. Kim, Sandpile abvalanche dynamics on scale-free networks, in arXiv:condmat/0401531v1 [cond-mat.stat-mech], January 2004.

J. D. Noh and H. Rieger, Random Walks on Comlex Networks, in arX:cond-mat/0307719v2 [cond-mat.stat-mech], March 2004.

M. Brthelemy, A. Barrat, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani Velocity and Hierarchical Spread of Epidemic Outbreaks in Scale-Free Networks, in Physical review letters, Vol. 92, No17, April 2004, pp. 178701.1-4.

A. Barrat, M. Barthelemy and A. Vespignani, Modeling the evolution of weighted networks ,in Physical Review E, Vol.70, December 2004, pp. 066149(1-12)

谷澤　俊弘「故障と攻撃の両方に強いつながり方とは?—ネットワークの機能不全と構造最適化」、『情報処理』Vol.49 No3、二〇〇八年七月、二八二〜二八九頁