2人および多人数ゲームにおける近視眼的・先見的安定性の一考察

大阿久　　　博

Abstract. ゲーム理論やマッチング理論に登場するプレイヤーは一般に近視眼的（myopic）な意思決定を行う場合が想定されることが多かった。しかしながら合理的な行動をするプレイヤーであれば、自身の行動に対して他のプレイヤーがどのように振る舞うか、それに対して自身はどう対応すればよいか等々を考慮に入れ意思決定を行なっていくというのがより現実的であると思われる。そうした観点から、プレイヤーの意思決定に先見的（farsighted）な行動を導入するさまざまな研究が進展してきた。

本稿では、2人及び多人数の戦略形ゲームにおいてプレイヤーが近視眼的な振る舞いをする場合と先見的な振る舞いをする場合に得られるゲームの結果の安定性・パレート効率性について比較・検討する。

1. Introduction.

ゲーム理論の均衡概念として用いられるナッシュ均衡、von Neumann-Morgenstern の安定集合、コアなどの概念は、いずれもプレイヤーは近視眼的（myopic）な行動を取ると想定されている。しかしながら現実的な人間行動を考えるとプレイヤーは先見的（farsighted）に振る舞うことが多いと考えられる。Harsanyi（1974）は、各プレイヤーは相手プレイヤーが取る戦略に対して最適となる戦略を選択するが、自身の選択した

戦略に対して相手がどのように反応するか、さらにその反応に対してはどう対応したらよいか等々、先々を考慮に入れた間接支配の考え方に基づき強安定集合（strictly stable set）の概念を提唱した。他にも様々な先見性をもった戦略選択のモデルが考案されている。

Brams（1993）、Kilgour（1984）は 2 × 2 戦略形ゲームにおいて各戦略の組を出発点として、プレイヤーが交互に戦略を変更する状況を完全情報展開形ゲームで表し、バックワード・インダクションによる先見的行動を考察した。また Harsanyi（1974）の先見的行動の考え方をさらに進めた Chwe（1994）は Largest consistent 集合の概念を考案した。Greenberg（1990）は、von Neumann-Morgenstern の安定集合と密接に関連する Optimistic Stable Standard of Behavior（OSSB）の概念を提唱した。Ray and Vohra（2015）では Harsanyi の先見的安定集合の修正として提携の与える影響はその提携の参加者のみという制約を設けた coalitional sovereignty の概念を導入した安定集合を提案している。

Suzuki and Muto（2005）は、多人数囚人のジレンマ・ゲームにおいてプレイヤーが Chew（1994）の先見的行動をする場合について分析した。Suzuki and Muto（2005）ではプレイヤーが提携し戦略を変更することが可能であるが、Nakanishi（2009）は提携による戦略変更は許されず、個人的な逸脱のみを可能とした場合の安定集合を分析している。

また、Herings et al（2009）は先見的なペアワイズ安定性という概念を提案し、ネットワークにおける安定性を分析した。Bloch and van den Nouweland（2021）は 2 人プレイヤーが近視眼的な行動をする場合と先見的な行動する場合の安定集合を包括的に分析し、特に近視眼的な状況において、安定集合とマッチングにおける安定マッチングとの関係を明らかにしたのが特徴的である。

本稿では上記のようなさまざまな研究を基に、2 人ゲームと多人数ゲーム、

特に囚人のジレンマ・ゲーム、調整ゲーム、チキン・ゲームなどの代表的なゲームにおいてプレイヤーの先見的な行動がどのような帰結をもたらすのか、いくつかの均衡概念・安定集合の概念を用いて分析する。

以下、2章では2人プレイヤーゲームにおいて先見的行動に対する2つの安定集合の概念を紹介し、その違いを見る。3章ではプレイヤーが多人数の場合を考える。最後章で得られた結果をまとめ、今後の研究の方向性について述べる。

2. 2プレイヤー・モデル

(1) Brams モデル

まず初めに2人プレイヤーモデルとしてBrams（1994）のモデルを紹介する。Brams（1994）は、戦略形ゲームを展開形ゲームに変形し、バックワード・インダクションを利用してプレイヤーの先見的な戦略選択を分析した。以下ではBrams（1994）にしたがい、完全情報2 × 2戦略形ゲームにおいてプレイヤーの先見的な行動をモデル化（Departureゲームと呼ぶ[1]）し、Nonmyopic Equilibria（NME）と呼ばれる均衡を求める。ナッシュ均衡とはならない協力的な状況がNMEの意味で安定になるケースがあり得ることが示される。以下ではgenericな2 × 2戦略形ゲームを分析対象とする。また、戦略形ゲームの戦略の組をステイトと呼ぶことにする。

Departureゲームの特徴は、はじめに出発点となる戦略形ゲームのステイト（初期ステイトと呼ぶ）を一つ特定する。そこから2人のプレイヤーが当該ステイトから離れるか（depart（D））、それとも当該ステイトに留まるか（stay（S））、という2つの選択肢を与える。そして初期ステイトから始まり再び初期ステイトに戻る展開形ゲームを構成するのである。

次の表１のプレイヤー１と２による戦略形ゲームを考える。プレイヤー１の行動は C_1 と D_1、プレイヤー２の行動は C_2 と D_2 である[2]。この戦略形ゲームから Departure ゲームを構成しよう。

表１

	C_2	D_2
C_1	A，a	D，d
D_1	B，b	C，c

初期ステイトが（C_1, C_2）であるとしよう。このときプレイヤー１が先に行動する場合、（C_1, C_2）においてのプレイヤー１の戦略は２つ（D と S）存在し、D は D_1 を選ぶ戦略であり、戦略 S は C_1 から変更しない戦略である。一方、プレイヤー２が先に行動する場合であれば、プレイヤー２の戦略 D は D_2 を選ぶことであり、戦略 S は C_2 から変更しないことである。他のステイトにおいてもプレイヤー１と２の戦略 D､S を同様に考える。

まず、Departure ゲームのルールを定める[3]。

(1) ２×２戦略形ゲームの利得表のどれか一つのステイトを初期ステイトに特定する。

(2) 初期ステイトから２人のプレイヤーは交互に戦略 D あるいは S を選択する。最初に戦略の選択をするプレイヤー（先手）を P_1、それに続いて戦略変更するプレイヤー（後手）を P_2 と呼ぶ（２×２戦略形ゲームでは、行プレイヤー、列プレイヤーのどちらにもなりうる）[4]。まず P_1 が戦略の選択を検討し、戦略 D を選択すると初期ステイトは新しいステイトに移るが、そのステイトは行あるいは列のどちらかは初期ステイトと同じである。

(3) 次に、P_2 も一方的に P_1 の戦略に反応して戦略を選択し、それによってまた新たなステイトに移る。

(4) 手番が回ってきたプレイヤー（P_1 または P_2）が S を選択するまで戦略選択は交互に行われる。S が選択されるとゲームは終了し、この最終的に行き着いたステイトを到達ステイトと呼ぶことにする。

(5) プレイヤーは以下の場合、初期ステイトで S を選択し留まる。

(i) 初期ステイトで D を選択すると、ゲームの到達ステイトで初期ステイトより利得が低くなってしまう。

(ii) 初期ステイトで D を選択すると、再び初期ステイトに戻ってしまう。

(6) 各プレイヤーは、自身の戦略選択と同様に、他のプレイヤーの合理的な戦略選択も考慮し、初期ステイト及びそれ以降の選択をバックワード・インダクションに基づいて決定する。ただし、初期ステイトにおいて、あるプレイヤーは D を選択し、他のプレイヤーは S を選択することが合理的であれば、D を選ぶプレイヤーが優先されるとする。

以上のルールでは、通常の戦略形ゲームではプレイヤーが同時に戦略を選択することから始まるのと違って、(1) ではプレイヤーたちはすでにあるステイトにいると仮定し、そのステイトから戦略を変更する (D) か、留まる (S) かの選択をプレイヤーが交互に行っていくとしている。また、ステイトは行動が変更されるたびに移っていくが、どちらかが S を選ぶことで到達ステイトに達し、利得を得る。到達ステイトに至るプロセスにおいて利得は生じないとしている。

上述の表 1 の戦略形ゲームから具体的に Departure ゲームを構成しよう。

初期ステイトを（C_1, C_2）とし、P_1をプレイヤー1とする。プレイヤー1はDあるいはSを選択する。ここでSを選択すると、ゲームは終了する。Dを選択した場合、ステイトは（D_1, C_2）に移り、プレイヤー2が選択を行う。プレイヤー2がSを選択すればゲーム終了。Dを選ぶとステイトは（D_1, D_2）に移る。そこではプレイヤー1が選択を行い、Sなら終了、Dなら（C_1, D_2）に移る。（C_1, D_2）ではプレイヤー2が選択を行うが、Sを選べば終了、Dを選ぶと初期ステイト（C_1, C_2）に戻る。

以上は次の図1のようなゲームの木で表現できる。（プレイヤー2がP_1となる場合はカッコで表している。）

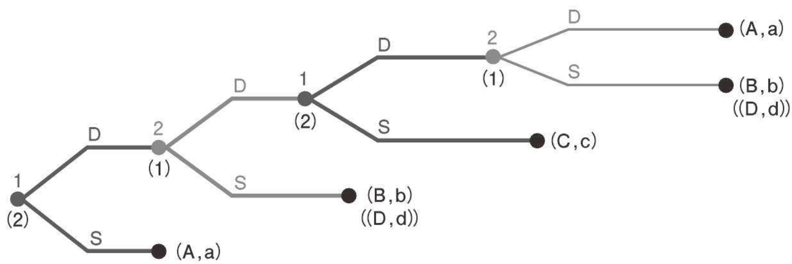


図1

この展開型ゲームをバックワード・インダクションで解き（ルール(6)）、初期ステイトからP_1がプレイヤー1（or 2）であった場合に得られる到達ステイトを1-(C_1, C_2)（or 2-(C_1, C_2)）と表記する。したがって一つの初期ステイトについて2つの到達ステイトが得られるが、この2つが同じ場合はそれを当該初期ステイトに対応するNME（NonMyopic Equilibria）と呼ぶ。2つの到達ステイトが異なり、一方がもう一方をパレート支配するときは支配する方をNMEとみなす。2つの到達ステイトが異なり、2つの間にパレート支配の関係がないときは、両者をNMEと

する。また、一方が初期ステイトでSを選びもう一方がDを選んだとき、ルール（6）からDを選ぶプレイヤーの方の到達ステイトをNMEとみなす。

Brams（1994）では、プレイヤーの利得が4, 3, 2, 1であるGenericなゲームのうち利得の組がとなるステイトを含まない57のゲームについてNMEを求めている[5]。ここでは3つのケースについてNMEの特性をみることにする。まず、囚人のジレンマ・ゲームのNMEを考えよう。

例1：囚人のジレンマ

表2

	C_2	D_2
C_1	3，3	1，4
D_1	4，1	2，2

このゲームではパレート支配される唯一のナッシュ均衡（D_1, D_2）が存在する。初期ステイトが（C_1, C_2）のときバックワード・インダクションにより、1-（C_1, C_2）は（3, 3）になり、利得の対称性から2-（C_1, C_2）も（3, 3）となる[6]。したがってNMEは（3, 3）である（図2）。

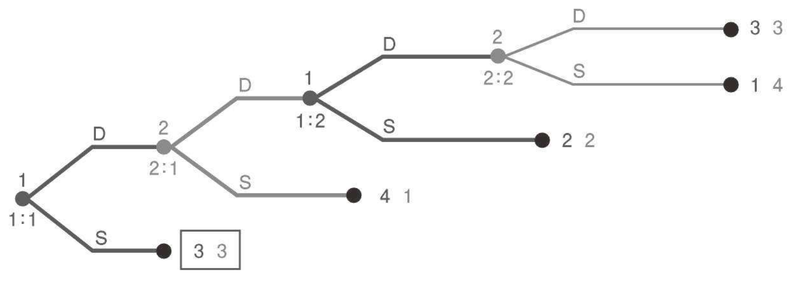


図2

次に初期ステイトが（D_1, C_2）のときを考える。バックワード・インダクションから得られる1-（D_1, C_2）は（4,1）になる（図3）。

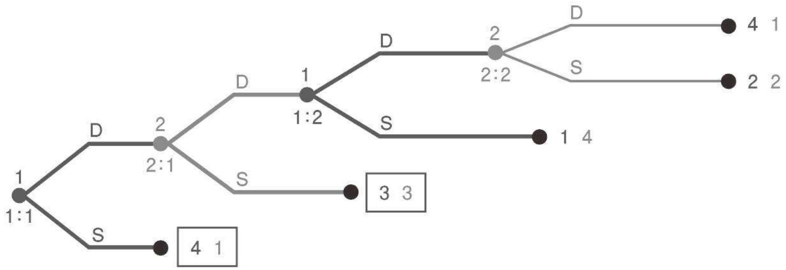


図3

また、同様に2-（D_1, C_2）は（2,2）となる（図4）。

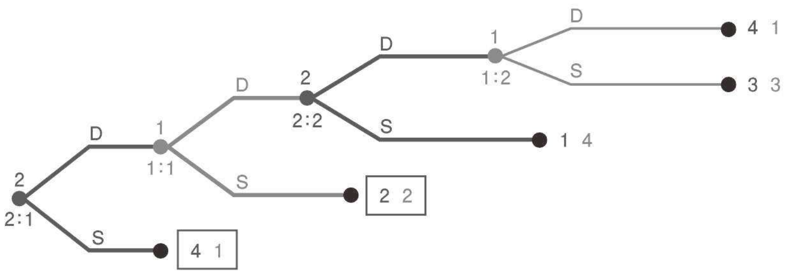


図4

このときにはルール（6）から2-（D_1, C_2）、つまり（2,2）がNMEと考えられるが、注意が必要である。プレイヤー1がP_1となる場合においては、自身が（バックワード・インダクションの選択に逆らい）Dを選んだとき（3,3）に至り、2-（D_1, C_2）をパレート優越するので、プレイヤー2にとっても合理的である。したがって初期ステイトが（D_1, C_2）ときの

NMEは（3, 3）とみなせる。

このような事態を改めて次のルールとして反映させる[7]。

(7) Two-sidedness convention（TSC）：もし一方のプレイヤー（プレイヤー2とする）がDを選択することでSを選択したときよりも良いステイトを導けるが、プレイヤー1がDを選択することで、プレイヤー2が誘導したステイトよりもパレート優越するステイトに至るのであれば、プレイヤー1は（バックワード・インダクションではSを選ぶとしても）Dを選択する[8]。

初期ステイトが（D_1, D_2）のときは、1-（D_1, C_2）は（2, 2），2-（D_1, D_2）も（2, 2）であるのでNMEは（2, 2）である。初期ステイトが（D_1, D_2）のときは、（D_1, C_2）のときと同様の推論からNMEは（3, 3）になる。

以上は次の表3で表すことができる。各初期ステイトからのNMEが角括弧で示され、その元のゲームでの利得が丸印で示されている。

表3

	C_2	D_2
C_1	3，3 [3，3]	1，4 [3，3]
D_1	4，1 [3，3]	2，2 [2，2]

（パレート支配される）ナッシュ均衡（D_1, D_2）から始まる場合のみ自身がNMEとなり、それ以外を初期ステイトとする場合はナッシュ均衡をパレート支配する（両者の）協力状態がNMEになり、プレイヤーが（Bramsモデルでの）先見的な行動をする場合には、NMEの意味で協力状況が達成されることが示唆される。

また囚人のジレンマは、前述の57のゲームにおいてパレート支配されるナッシュ均衡がNMEにもなる唯一のゲームであることが示されている。

次に調整ゲームのNMEを考えよう。

例2：調整ゲーム

表4

	C_2	D_2
C_1	4，3 [3，4]	2，2 [3, 4]/[4, 3]
D_1	1，1 [3, 4]/[4, 3]	3，4 [4，3]

このゲームでは初期ステイト（C_1, C_2）のNMEはルール（6）より（3, 4）になる。また、初期ステイトが（D_1, C_2）のときは、1-（D_1, C_2）は（3, 4）、2-（D_1, C_2）は（4, 3）で、この両者には互いにパレート支配関係がないので、両方ともNMEとみなす。これは互いに相手が先に行動してくれたほうが利得は高くなる状況である。Brams（1994）では、こうした不確定な状況において行動を起こす順番を決められる権利（Order Power）を設定している[9]。

初期ステイト（D_1, D_2）のNMEはルール（6）より（4, 3）になる。初期ステイトが（C_1, D_2）のときは（D_1, C_2）のときと同様に1-（C_1, D_2）は（3, 4）、2-（C_1, D_2）は（4, 3）になる。

このゲームではナッシュ均衡（C_1, D_2）、（D_1, D_2）とNMEが一致し、先見的な行動が本質的な違いをもたらさないと考えられる。

最後にチキン・ゲームを考える。

例3：チキン・ゲーム

表5

	C_2	D_2
C_1	3，3 [3，3]	2，4 [4,2]／[3,3]
D_1	4，2 [3,3]／[2,4]	1，1 [2,4]／[4,2]

初期ステイト（C_1, C_2）のNMEは（3,3）である。初期ステイトが（D_1, D_2）のとき、1-（D_1, C_2）は（2,4）、2-（D_1, D_2）は（4,2）になり、この2つがNMEとなる。

初期ステイトが（D_1, C_2）のときは単純にバックワード・インダクションを実行するとプレイヤー1が先に行動する場合、1はSを選択し初期ステイト（4,2）に留まる。一方プレイヤー2が先に行動を起こすときは2-（D_1, C_2）は（2,4）である。この状況ではルール（6）からNMEは（2,4）となるが、プレイヤー1が初期ステイトでSを選択せずDを選べば（3、3）が実現され、プレイヤー1にとっては留まって（2,4）を得るより利得が高くなる。したがって1-（D_1, C_2）は（3,3）と考えられる。初期ステイトがのときも同様に、1-（C_1, D_2）は（4,2）、2-（C_1, D_2）は（3,3）となる。

このゲームではナッシュ均衡の（D_1, C_2）と（C_1, D_2）、および両者の協力状態（C_1, C_2）がNMEとなる。

Departureゲームによる分析は、2×2戦略形ゲームからプレイヤーが交互に（2つの）戦略を選ぶ8つの展開形ゲームを構成し、バックワード

インダクションを使ってプレイヤーの先見的行動を考えるという比較的単純でわかりやすい方法を取っている。上記の例では、MNE がナッシュ均衡と一致することもあれば、ナッシュ均衡では得られない協力状態が MNE となる場合もあることが示された[10]。

しかし NME は、どのステイトからプレーが始まるか、どちらのプレイヤーがオーダー・パワーを持つかに依存し、特定のステイトをより信憑性のある NME とみなすことができるかの判断は難しい。

また、純粋戦略を 2 つ以上持つゲームでは同様の方法を適応すると、一般的に初期ステイトに戻る経路数が膨大になり、それぞれの経路からのバックワード・インダクションの結果を比較せねばならず、分析はかなり煩雑になるという欠点を持っている。

とはいえ NME はナッシュ均衡とは異なり、パレート効率的なものが必ず一つは存在することが示されている。

定理 1 (Brams and Ismail (2022)：Generic な戦略形ゲームによる Departure ゲームにおいて少なくとも 1 つのパレート効率的な NME が存在する。

Brams (1994) のモデルでは、個々のステイトが NME になるかを検討しており、ステイトの集合の安定性という観点からは議論されていない。次節では von Neumann-Morgenstern 安定集合のようにステイトの集合についての安定性条件を検討する。

(2) 近視眼的安定集合と先見的安定集合

まず 2 人ゲームでの von Neumann-Morgenstern 的な近視眼的安定集合と Chwe (1994) の考え方に基づいた先見的安定集合を考察する[11]。

以下では一般に、2 人ゲームを $G=(\{1,2\}, X_1, X_2, u_1, u_2)$ とする。ここで $\{1,2\}$ はプレイヤー集合、X_i はプレイヤー i $(i=1,2)$ の戦略集合、

$u_i : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ はプレイヤー i の利得関数である。$X \equiv X_1 \times X_2$ とする。また、以下でも generic なゲームを考える。

$x, y \in X$ について、$x_i \neq y_i$ かつ $x_j = y_j$ $(j \neq i)$ のとき x と y は隣接するといい、$x \underset{i}{\to} y$ と記す。近視眼的および先見的な支配関係を以下のように定義する。

定義1：$y \in X$ が $x \in X$ を**近視眼的に支配**するとは、x と y が隣接し、あるプレイヤー $i \in \{1, 2\}$ が存在し、$u_i(y) > u_j(x)$ となるときをいい、$x \lhd y$ と記す。これは、プレイヤー i がある期において次の期に利得が上がるように戦略を変更することを示している。

定義2：$y \in X$ が $x \in X$ を**先見的に支配**するとは、次のような $x \in X$ から $y \in X$ への先見的改善パスが存在するときをいい、$x \lhd\lhd y$ と記す。

$x^0\ (=x)$ から $x^m\ (=y)$ への先見的改善パスとは、$m+1$ 個の各々が隣接するステイトの列と m 個のプレイヤーの列 $i_0, i_2, \dots i_{m-1}$（ただし $i_1, i_2, \dots i_{m-1} \in \{1, 2\}$）からなる列 $x^0 \underset{i_0}{\to} x^1 \underset{i_1}{\to} x^2 \underset{i_2}{\to} \cdots \underset{i_{m-2}}{\longrightarrow} x^{m-1} \underset{i_{m-1}}{\longrightarrow} x^m$ で $x^l \in X$ $(l = 0,1,2,\dots,m)$ であり、$i_l \in \{1, 2\}$ $(l = 0, 1, 2, \dots, m-1)$、任意の $l \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ について $u_{i_l}(x^l) < u_{i_l}(x^m)$ を満たすものをいう。このとき m を先見的支配パスの長さという。定義から近視眼的支配は、長さ1の先見的改善パスを持つ場合である。

先見的改善パスの概念は、プレイヤーが先見性を持って行動すること、つまり各期において各プレイヤーがたとえ戦略を変更することですぐ次の期では損をしても、その後引き続いて起きる他プレイヤーたちの戦略変更を考慮して $x^m\ (=y)$ に到達することを予見し、その最終ステイト x^m では得をするという状況を見通すことができるという状況を表している[12]。

これらの近視眼的支配、先見的支配の概念を用いて、次のように近視眼

的安定集合、先見的安定集合を定義する。

定義3：$V \subseteq X$が近視眼的安定集合であるとは、次の2つを満たす場合をいう。

内部安定性：$x \in V$であるなら、任意の$y \in V$に対して$x \lhd y$とならない。

外部安定性：$x \in X \setminus V$であるなら、ある$y \in V$が存在し$x \lhd y$となる。

定義4：$V \subseteq S$が先見的安定集合であるとは、定義3の近視眼的支配関係$\lhd$を先見的支配関係$\lhd\lhd$で置き換えた内部、及び外部安定性が成り立つときをいう[13]。

以下では、近視眼的安定集合をW^M、先見的安定集合W^Fをと記す。

Bloch and van den Nouweland (2021) は、2人ゲームにおける近視眼的・先見的安定集合に関する詳細な分析を行っている[14]。そこではまず近視眼的安定集合と（1対1）2部マッチング問題の安定集合との間に興味深い関連性が示されている。2部マッチング問題におけるマッチングとは、2つの互いに素な集合MとWが存在し、各$m \in M$について集合$W \cup \{m\}$上の選好$\succ_m$、各$w \in W$について集合$W \cup \{w\}$上の選好$\succ_w$が与えられたとき[15]、$M \cup W$からそれ自身への写像$\mu: M \cup W \to M \cup W$のことである。ただし、$\forall m \in M$について$\mu(m) \in W \cup \{m\}$、$\forall w \in W$について$\mu(w) \in N \cup \{w\}$であり、$\mu(m)=w$が成り立つのは$\mu(w)=m$が成り立つときである。このマッチング$\mu$が安定であるとは、$w \succ_m \mu(m)$かつ$m \succ_w \mu(w)$となるようなペア$(m, w) \in M \times W$が存在しないときをいう[16]。

プレイヤー1, 2による2人ゲームにおいて、それぞれの戦略集合をM、Wとする。つまりプレイヤーの各戦略を相手プレイヤーの戦略にマッチングさせるという問題を考える。各$m_k \in M$、$w_\ell \in W$について、もしu_2

$(m_k, w_i) > u_2(m_k, w_j)$ であるならば、$w_i \succ_{m_k} w_j$、同様に $u_1(m_i, w_\ell) > u_1(m_j, w_\ell)$ であるならば $m_i \succ_{w_\ell} m_j$ と選好を定める。

この2人ゲームを（$\{1, 2\}, M, N, u_1, u_2$）M と N の2部マッチング問題とみなすことで次が得られる。

定理2 (Bloch and van den Nouweland (2022))：2人ゲーム（$\{1, 2\}, M, N, u_1, u_2$）(ただし $M = \{m_1, \ldots, m_M\}, N = \{n_1, \ldots, n_N\}, m_M \leq n_N$ とする）について、$L \subseteq M \times N$ が近視眼的安定集合になるのは $L = \{(m_i, \mu(m_i)) \mid m_i \in M\}$ なる安定マッチング μ が存在するときで、そのときに限られる[17]。

以下、Bramsのモデルのときと同様に囚人のジレンマ・ゲーム、調整ゲーム、チキン・ゲームについて、それらをマッチング問題と見たときの安定マッチング、またそれぞれの近視眼的安定集合および先見的安定集合をみる。

例1（囚人のジレンマ：表3再掲） 先述の囚人のジレンマ・ゲームを考える。行プレイヤーを1、列プレイヤーを2とする。

	C_2	D_2
C_1	3, 3	1, 4
D_1	4, 1	2, 2

$M = \{C_1, C_2\}$, $W = \{D_1, D_2\}$ としてマッチング問題を構成する。
M, N の各メンバーの選好は次のようになる。

C_1	D_1
D_2	D_2
C_2	C_2

C_2	D_2
D_1	D_1
C_1	C_1

安定マッチングは $(C_1, C_2), (D_1, D_2)$ である。また定義3から $\{(C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$ が近視眼的安定集合 W^M になることも明らかであろう。先見的安定集合 M^F も $\{(C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$ になることも次のように確かめ

られる[18]。

まず $u_1(D_1, D_2) > u_1(C_1, D_2)$、$u_2(D_1, D_2) > u_3(D_1, C_2)$であり、$W^F = \{(C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$ の外部安定性が確認できる。

また、$(C_1, C_2) \lhd\lhd (D_1, D_2)$ が構成できないことは明らかであり、$(D_1, D_2) \underset{1}{\rightarrow} (C_1, D_2) \underset{2}{\rightarrow} (C_1, C_2)$ あるいは $(D_1, D_2) \underset{2}{\rightarrow} (D_1, C_2) \underset{1}{\rightarrow} (C_1, C_2)$ という先見的支配パスは $u_2(C_1, D_2) > u_2(C_1, C_2)$、$u_1(D_1, C_2) > u_1(C_1, C_2)$、であることから構成不可能であり、内部安定性も満たされることがわかる。

囚人のジレンマ・ゲームは、singleton となる W^F を持たず、また2つ要素を持つが W^F 存在する唯一の 2 × 2 ゲームである（Bloch and van den Nouweland (2022), Propsition 5.1,2)。

例 2（調整ゲーム：再掲）

	C_2	D_2
C_1	4，3	2，2
D_1	1，1	3，4

M, N の選好は次のようになる。

$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{D_1}$
C_2	D_2
D_2	C_2

$\boldsymbol{C_2}$	$\boldsymbol{D_2}$
C_1	D_1
D_1	C_1

安定マッチングは $(C_1, C_2), (D_1, D_2)$ であり、近視眼的安定集合 W^M は $\{(C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$ になる。先見的安定集合 W^F は $\{(C_1, C_2)\}$,と $\{(D_1, D_2)\}$ になる。実際、$\{(C_1, C_2)\}$, $\{(D_1, D_2)\}$ は singleton であるから内部安定性は明らか。また $(C_1, D_2) \underset{2}{\rightarrow} (C_1, C_2)$、$(D_1, C_2) \underset{1}{\rightarrow} (C_1, C_2)$、$(D_1, D_2) \underset{1}{\rightarrow} (C_1, D_2) \underset{2}{\rightarrow} (C_1, C_2)$ より $\{(C_1, C_2)\}$ の外部安定性が示せる。$\{(D_1, D_2)\}$ についても同様。

例3（チキン・ゲーム：再掲）

	C_2	D_2
C_1	3，3	2，4
D_1	4，2	1，1

ナッシュ均衡は(C_1, D_2)、(D_1, C_2)の2つ。M, Nの選好は次のようになる。

$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{D_1}$	$\boldsymbol{C_2}$	$\boldsymbol{D_2}$
D_2	C_2	D_1	C_1
C_2	D_2	C_1	D_1

安定マッチングは（C_1, D_2), （D_1, C_2）であり、近視眼的安定集合W^Mは$\{(C_1, D_2), (D_1, C_2)\}$になる。先見的安定集合$M^F$は$\{(C_1, D_2)\}$，$\{(D_1, C_2)\}$になる。Bramsモデルでは（$C_1, C_2$）もNMEになっていたが、こちらでは（$C_1, C_2$）は$W^F$にはならない。

近視眼的安定集合と安定マッチングの関係は、3人以上のプレイヤーが参加するゲームでは見出すことはできない。また、2人ゲームであっても先見的安定集合とマッチングの関連は見られない。しかし近視眼的という限定された状況にのみ成り立つ関係であっても、安定マッチングにおいて確立された結果が近視眼的安定集合に応用できるという点では有用性が高い。

2人ゲームで一方のプレイヤーが2つの戦略しか持たないすべてのゲームの先見的安定集合W^Fについて以下が示されている[19]。

定理3（Bloch and van den Nouweland（2022））：すべてのgenericな$2 \times n$ゲームは少なくとも1つのW^Fを持つ。

3. 他人数ゲーム

次に多人数の場合のゲームにおける近視眼的・先見的安定集合を考えよう。まず一般的な多人数のプレイヤーによるゲーム $(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ を定義する。以下では Nakanishi (2009) の表記に準じる。$N \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ をプレイヤーの集合とする。$X_i \equiv \{C, D\}$ はプレイヤー i の戦略集合とし、C は「協力」を表し、D は「非協力」を表すとする。C をプレーするプレイヤーを C-プレイヤー、D をプレーするプレイヤーを D-プレイヤーと呼ぶ。$X \equiv \Pi_{i \in N} X_i$ とし、$\forall x \in X$ をステイトと呼ぶ。

また、$\forall x \in X$ に対して、$C(x)$ でステイト x に存在する C-プレイヤーの集合、$C(x) = \{i \in N | x_i = C\}$ を表すとする。以下では集合 A に対して $|A|$ で A の要素の個数を表す。

ゲームのステイト $x \in X$ は、x における C-プレイヤーの数 $|C(x)|$、つまり集合 $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ の要素で $h \in H = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ で特徴づけられる。例えば $h=0$ となるステイトは唯一の要素 $(\overbrace{D, D, \ldots, D}^{n個})$ であり、$h=n$ は $(\overbrace{C, C, \ldots, C}^{n個})$ である。$0 < h < n$ については、例えばに $h=1$ ついては $(C, D, \ldots, D)$、$(D, C, D, D, \ldots, D)$ など $n+1$ 通りの状況があり得るが、これらのステイトの集合を[1]と表記する。一般に C-プレイヤーの数が h 人 $(h = 0, 1, 2, \ldots, n)$ のときステイトの集合を $[h] = \{x \in X | |C(x)| = h\}$ と記す[20]。

$u_i : X \to \mathbb{R}$ はプレイヤー i の利得関数であり、各プレイヤーの利得は自身の選択した戦略のみならず、他のプレイヤーの戦略、特に何人のプレイヤーが C を選択したかに依存するとする。これより $|C(x)| = h$ なる $x \in X$ に対して、プレイヤー i の利得関数を $u_i(x) \equiv f(x_i, h)$ と設定する[21]。$f(x_i, h)$ においては自分自身も含めた C-プレイヤーの数である。

以下では、プレイヤーは提携して戦略を変更することは許されず、個人

による戦略変更のみが可能であるとする[22]。

多人数ゲームにおいても、2人ゲームのときのプレイヤー集合を $\{1, 2\}$ から $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ に変更することで近視眼的・先見的な改善パス、および近視眼的・先見的安定集合を同様に定義できる。

(1) 多人数囚人のジレンマ・ゲーム

まずNakanishi (2009) での設定をもとに多人数囚人のジレンマ・ゲームを考察する。

ゲーム $(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}$ について、利得関数 $u_i(x) \equiv f(x_i, h)$ を次の条件を満たすようにすることで**多人数囚人のジレンマ・ゲーム**が構成される[23]。

(PD1)、$f(D, h-1) > f(C, h)$、$\forall h = 1, 2, \ldots, n$

(PD2) $f(C, n) > f(D, 0)$

(PD3)、$f(C, h), f(D, h)$ はともに h の増加関数である。

ここで (PD1) は他のプレイヤーの戦略が同じであれば、D-プレイヤーの利得の方がC-プレイヤーより高いことを意味する。(PD2) は全員がCをプレーするステイトが、全員Dをプレーするステイトをパレート支配していることを表している。また (PD3) は、C-プレイヤー、D-プレイヤーどちらにとっても、C-プレイヤーの数が増えるほど利得が高くなることを表している。

次が成り立つことが直ちにわかる。

命題1：多人数囚人のジレンマ・ゲーム $(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}$ において、$[0] \in X$ が唯一のナッシュ均衡である。ただし $[0]$ はパレート効率的ではない。

証明：$[0]$ においては (PD1) よりDからCに戦略を変更すると利得が

下がるので変更するプレイヤーはいない。

また、$\forall x \neq [0]$ においては少なくとも一人のC-プレイヤーkが存在するが、(PD1) よりC-プレイヤーkはDに変更した方が良い。したがって、[0] が唯一のナッシュ均衡である。(PD2) よりパレート効率的でないのは明らか。

また、プレイヤーが近視眼的なとき次が成り立つ。

命題2：(Nakanishi (2009), Observation 1)：多人数囚人のジレンマ・ゲームにおいて、唯一の近視眼的安定集合、

$$W^M = \bigcup_{h:偶数} [h]$$

が存在する。

Nakanishi (2009) では、次のようにn人囚人のジレンマ・ゲームにおいて h_t ($t = 0, 1, 2, \ldots$) を定義し、プレイヤーが先見的な場合の安定集合 W^F を求めている。

まず $t = 0$ のとき $h_0 \equiv 0$ とする。$t = 1, 2, \ldots$ については、

$$h_t = \min\{h \mid f(C, h) > f(D, h_{t-1})\}, t = 1, 2, \ldots$$

とする。つまり h_t は、ある状況 (h_{t-1} ($t = 1, 2, \ldots$)) でのD-プレイヤーの利得をC-プレイヤーの利得が上回る最小のC-プレイヤーの数である。また、上記の h_t の定義を満たす t の集合を $T = \{0, 1, 2, \ldots t, \bar{t}\}$ とする。

定理4 (Nakanishi (2009), Theorem1)：n人の先見的プレイヤーによる囚人のジレンマ・ゲーム (N, $(x_i)_{i\in N}$, $(u_i)_{i\in N}$) において、唯一の先見的安定集合

$$W^F = \bigcup_{t \in T} [h_t]$$

が存在する。

上記の一般的な多人数囚人のジレンマ・ゲームにおける利得関数fを次のように特定化する[24]。hはこれまで通りC−プレイヤーの数であり、GとKは$K > G$なる定数とする。

$$f(D, h) = Gh \qquad (0 \leq h < n)$$
$$f(C, h) = Gh - K \quad (0 < h \leq n)$$

$K > G$の仮定より$f(D, h-1) = G(h-1) > f(C, h) = Gh - K$であるから、(PD1) が満たされる。

また (PD2) より、

$$f(C, n) = Gn - K > f(D, 0) = 0$$

であるから、$\frac{K}{n} < G$が成り立っていなければならない。

例4：多人数囚人のジレンマで$n = 10, G = 2, K = 5$の場合を考える。このときにはプレイヤーの利得関数は次になる。

$$f(D, h) = 2h \qquad 0 \leq h \leq 9$$
$$f(C, h) = 2h - 5, \quad 1 \leq h \leq 10$$

このとき命題2から近視眼的安定集合は、

$W^M = \bigcup_{h \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}} [h]$ となる。

また、$h_0 \equiv 0, h_1 = 3, h_2 = 6, h_3 = 9$であり、定理4より、先見的安定集合は、$W^F = \bigcup_{h \in \{0, 3, 6, 9\}} [h]$ である。

(2) 多人数協調ゲーム

多人数囚人のジレンマの設定を変更し、次のような利得関数を持った

多人数ゲームを考える。

$$f(D,h)=\begin{cases}Gh+J & (0\leq h\leq h_0)\\ G'h+(G-G')h_0+J & (h_0<h<n)\end{cases}$$

$$f(C,h)=\begin{cases}Gh+K & (0<h\leq h_0)\\ G'h+(G-G')h_0+K & (h_0<h\leq n)\end{cases}$$

ここで h はC-プレイヤーの数で、h_0 は $0<h_0<n$ を満たす定数とする。また、$0\leq K<J, G<J-K<G'$ とする。このとき、

(C1) $f(D, h-1)>f(G, h), 1\leq h\leq h_0$

(C2) $f(D, h-1)<f(G, h), h_0<h\leq n$

が成り立つ。この設定のゲームを「多人数協調ゲーム」と呼ぶことにする。また以下では

(C3) $j-K<G' n+(G-G')h_0$

と仮定する。

このゲームではC-プレイヤーの人数が h_0 より少ないときは（C-プレイヤーは）戦略をCからDに変更することで利得が増加し、h_0 より多いときにはDからCに選択を変更した方が利得は増加する。ナッシュ均衡はすべてのプレイヤーがCを取るときの $[n]$ と、すべてのプレイヤーがDを取るときの $[0]$ の2つになる。仮定（C3）から $f(D, 0)<f(G, n)$, であり $[n]$ が $[0]$ をパレート支配する。

また、(C1), (C2) より次が成り立つ。

補題：(i) 任意の $1\leq h\leq h_0$ について、$\forall x\in[h]$ に対して $x\lhd x'$ なる $x'\in[h-1]$ が存在する。

(ii) 任意の $h_0<h\leq n-1$ について、$\forall y\in[h]$ に対して $y\lhd y'$ なる $y'\in[h+1]$ が存在する。

証明：(i) $\forall x\in[h]$、$i\in C[x]$（ここで $h=|C[x]|$）に対して (C1)

より $x_i{}' = D$、$\forall j \neq i, j \in C$（$x$）については $x_j = C$ となる $x' \in [h-1]$ が存在し $x \lhd x'$ が構成できる。(ii) についても同様。

多人数協調ゲームにおける近視眼的安定集合 W^M について次が成り立つ。

命題3：多人数協調ゲームにおける近視眼的安定集合 W^M は、

(1) n が偶数のときは

$$W^M = \bigcup_{h:\text{偶数}} [h]$$

であり、

(2) n が奇数のときは

$$W^M = \Big(\bigcup_{h<h_0, h:\text{偶数}} [h]\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{h_0<h', h':\text{奇数}} [h']\Big)$$

である。特に $h_0 \notin W^M$ である。

証明：(1) $[0], [n] \notin W^M$ とすると、$[0] \lhd x, [n] \lhd x'$ となる $x, x' \in W^M$ が存在しなければならないが、(C1), (C2) よりこれは不可能である。よって $[0], [n] \in W^M$ である。奇数 h（$1 \leq h \leq h_0$）については補題 (i) より $\forall x \in [h]$ ($\not\subseteq W^M$) に対して、$\exists x' \in [h-1]$ ($\subseteq W^M$), $x \lhd x'$ が構成できる（$x \in [h]$ のC-プレイヤーがDに変更する）。同様に奇数 h（$h_0 \leq h \leq n-1$）については補題 (ii) から $\forall y \in [h]$ ($\not\subseteq W^M$) に対して、$\exists y' \in [h+1]$ ($\subseteq W^M$), $y \lhd y'$ が構成できる。したがって外部安定性が成り立つ。

また、プレイヤーは提携して戦略を変更することは許されず、個人による戦略変更のみが可能であるので内部安定性は明らか。

(2) (1) と同様に $[0], [n] \in W^M$ である。奇数 h（$1 \leq h \leq h_0$）については $\forall x \in [h]$ ($\not\subseteq W^F$) に対して、$\exists x' \in [h-1]$ ($\subseteq W^M$), $x \lhd x'$ が構成できる。同様に偶数 h（$h_0 < h \leq n-1$）については $\forall y \in [h]$ ($\not\subseteq W^M$) に対して、$\exists y' \in [h+1]$ ($\subseteq W^M$), $y \lhd y'$ とできる。

また、h_0が奇数であれば補題（i）より$\forall x \in [h_0]$（$\not\subseteq W^M$）に対して$x' \in [h_0-1]$（$\subseteq W^M$）が存在して$x \lhd x'$とでき、h_0が偶数であれば補題（ii）より$\forall x \in [h_0]$（$\not\subseteq W^M$）に対して$x' \in [h_0+1]$（$\subseteq W^M$）が存在して$x \lhd x'$とできる。以上から外部安定性が満たされる事がわかる。内部安定性については明らか。

命題4：多人数協調ゲームにおける唯一の先見的安定集合W^Fは、

$$W^F = \{[n]\}$$

である。

証明：W^FはSingletonであり内部安定性は明らか。

任意の$x \notin W^F$を取る。このxには少なくとも一人のD-プレイヤーが存在する。その利得は、

$$f(D,|C(x)|) = \begin{cases} G|C(x)|+J & (0 \le |C(x)| \le h_0) \\ G'|C(x)|+(G-G')h_0+J & (h_0 < |C(x)| < n) \end{cases}$$

であり、一方、

$$f(C,n) = G'n + (G-G')h_0 + K$$

であるから、$\forall x \notin W^F$におけるD-プレイヤーについて、

$$\begin{aligned} & f(C,n) - f(D,|C(x)|) \\ &= \begin{cases} G'(n-h_0)+G(h_0-|C(x)|)-(J-K) > (J-K)(n-h_0-1) \\ \qquad\qquad +G(h_o-|C(x)|) \ge 0 & (0<|C(x)| \le h_0) \\ G'(n-|C(x)|)-(J-K) > (J-K)(n-1-|C(x)|) \ge 0 & (h_0 < |C(x)| \le n) \end{cases} \end{aligned}$$

である。したがって$\forall x \notin W^F$に対して、$x^{|C(x)|+\ell} \in [|C(x)|+\ell]$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-|C(x)|$が存在し（ここで$x = x^{|C(x)|}$）、$x^n = [n]$以外の各$x^{|C(x)|+\ell}$には少なくとも一人のD-プレイヤーが存在するので、

$$x^{|C(x)|} \xrightarrow[D^{|C(x)|}]{} x^{|C(x)|+1} \xrightarrow[D^{|C(x)|+1}]{} x^{|C(x)|+2} \xrightarrow[D^{|C(x)|+2}]{} \cdots \xrightarrow[D^{n-2}]{} x^{n-1} \xrightarrow[D^{n-1}]{} x^n = [n]$$

のように$x \lhd\lhd x_n$が構成でき、外部安定性が満たされる。ただし$D^{|C(x)|+\ell} \in \{i \mid x_i^{|C(x)|+\ell} = D\} \subseteq N$である。

また別の安定集合 $W' \neq W^F$ が存在するとする。このとき $[n] \notin W'$ である。なぜならもし $[n] \in W'$ であれば、$|C(y)| \neq n$ となるある $y \in W'$ が存在しなければならず、上記と同様の議論から先見的改善パス $y \lhd\lhd [n]$ が構成でき、内部安定性に矛盾する。

$[n] \notin W'$ とすると、W′（$\neq W^F$）が存在するには、$y' \neq$ [n], $y' \in W'$ なるある y' に対して先見的改善パス $[n] \lhd\lhd y'$ を構成できなければならない。しかし任意の $h < n$ に対して $f(D, h) < f(C, n)$ であるから、これは構成不可能である。したがって W' は外部安定性を満たさない。

もし仮定（C3）の代わりに

（C3'）$J - K > G' n - (G + G')\, h_0$

とすると、命題４と同様の議論で $\{[0]\}$ が唯一の先見的安定集合となる。

例５：多人数囚人の協調ゲームで $n = 10$, $G = -\frac{3}{2}$, $G' = \frac{3}{2}$, $J = 7$, $K = 6$, $h_0 = 4$ の場合を考える。

$$f(D,h) = \begin{cases} -\frac{3}{2}h + 7 & (0 \leq h \leq 4) \\ \frac{3}{2}h - 5 & (4 < h < n) \end{cases}$$

$$f(C,h) = \begin{cases} -\frac{3}{2}h + 6 & (0 < h \leq 4) \\ \frac{3}{2}h - 6 & (4 < h \leq 10) \end{cases}$$

このとき命題３、４より $W^F = \cup_{h \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}} [h]$、$W^F = \{[10]\}$ となる。また、$n = 9$ として他のパラメータは同じとすると、$W^F = \cup_{h \in \{0, 2, 5, 7, 9\}} [h]$、$W^F = \{[9]\}$ となる。

(3) 多人数チキン・ゲーム

利得関数 $u_i(x) \equiv f(x_i, h)$ について以下のように設定する。h はいままで同様C-プレイヤーの数である。ただし $B > K > 0$ と仮定する[25]。

$$f(C,h) = \begin{cases} B-K & (h_0 \le h \le n) \\ -K & (1 \le h \le h_0 - 1) \end{cases}$$

$$f(D,h) = \begin{cases} B & (h_0 \le h \le n-1) \\ 0 & (0 \le h < h_0 - 1) \end{cases}$$

この設定のゲームを「多人数チキン・ゲーム」と呼ぶことにする。C-プレイヤーの数がの状態においてC-プレイヤーが戦略をDに変更したときの利得の増加分は、

$$\nabla_h(C;D) = f(D,h-1) - f(C,h)$$
$$= \begin{cases} K & (0 \le h \le h_0 - 1) \\ K-B & (h = h_0) \\ K & (h_0 + 1 \le h \le n) \end{cases}$$

である。同様に、D-プレイヤーがCに変更したときは

$$\nabla_h(D;C) = f(C,h+1) - f(D,h)$$
$$= \begin{cases} -K & (0 \le h \le h_0 - 2) \\ B-K & (h = h_0 - 1) \\ -K & (h_0 \le h \le n-1) \end{cases}$$

である。

プレイヤーが近視眼的な場合、次を得る[26]。

命題5： 多人数チキン・ゲームにおいて、$h_0 > 1$ のとき $[0]$ と $\forall x \in [h_0]$ はナッシュ均衡であり、それ以外は存在しない。$[0]$ はパレート効率的ではないが、$\forall x \in [h_0]$ はパレート効率的である。また $h_0 = 1$ のときは $\forall x \in [h_0]$ がナッシュ均衡で、$[0]$ はナッシュ均衡にはならない。

証明： $h_0 > 1$ とする。$[0]$ では全員がD-プレイヤーであり、$\nabla_0(D;C) = -K$

であるので戦略を変更しない。

$[h_0]$ では、$\nabla_{h_0}(C;D) = K - B < 0$、$\nabla_{h_0}(D;C) = -K$ であるので C-プレイヤー、D-プレイヤーともに戦略の変更はしない。

また、$h \neq 0, h_0$ の場合、$\nabla_h(C;D) = K$ となるので、ナッシュ均衡にはならない。

$[0]$ は $x \in [h_0]$ にパレート支配される。一方、$\forall x \in [h_0]$ においては、D-プレイヤーは最も高い利得を得ており、C-プレイヤーが戦略を変更すると全員の利得が下がってしまう。したがって $\forall x \in [h_0]$ はパレート効率的である。

$h_0 = 1$ とする。このとき $[0]$ において $\nabla_0(D;C) = B - K$ となり、D-プレイヤーは戦略を変更する。したがって $[0]$ はナッシュ均衡にならない。一方、$\forall x \in [h_0]$ においては、$\nabla_{h_0}(C;D) = K - B < 0$、$\nabla_{h_0}(D;C) = -K$ であるので C-プレイヤー、D-プレイヤーともに戦略の変更はしない。したがって $\forall x \in [h_0]$ はナッシュ均衡になる。

命題6： 多人数チキン・ゲームの近視眼的安定集合 W^M は $[h_0]$ を含む。さらに $h_0 \neq 1$ のときは $[0], [h_0] \subseteq W^M$ である。

証明： $[h_0] \not\subseteq W^M$ とすると、$\forall z \in [h_0]$ に対してある $x \in W^M$ が存在し、$z \lhd x$ とならなければ外部安定性を満たさない。しかし z においては、$\nabla_{h_0}(C;D) = K - B < 0$、$\nabla_{h_0}(D;C) = -K < 0$ であるから $z \lhd x$ は構成できない。したがって $[h_0] \subseteq W^M$ でなくてはならない。

$h_0 \neq 1$ のとき $[0] \notin W^M$ ときとする。このときある $x \in W^M$ が存在し、$[0] \lhd x$ とならなければならないが、$[0]$ では $\nabla_0(D;C) = -K < 0$ であるからこのような近視眼的支配関係を構成することはできない。したがって $[0] \in W^M$ である[27]。

また、h_0 の偶・奇によって W^M は次のような性質を持つ。

命題7：多人数チキン・ゲームの近視眼的安定集合 W^M について次が成り立つ。

(1) h_0 が偶数のとき $W^M = \cup_{h:\text{偶数}}[\mathrm{h}]$ である。

(2) $h_0 = 1$ のとき $W_1^M = \cup_{h:\text{奇数}}[\mathrm{h}]$ である

(3) h_0 が3以上の奇数のときは、$L = \{0, 2, \ldots, h_0-5, h_0-3, h_0, h_0+2, h_0+4, \ldots, h_0+2\ell,\}$（ただし $h_0+2\ell \leq n,\ \ell = 1, 2, 3 \ldots$）とすると、近視眼的安定集合 W_2^M は、

$$W_2^M = \bigcup_{h \in L}[h]$$

である。

証明：(1) h_0 を偶数とする。命題6より $[h_0] \subseteq W^M$ である。プレイヤーは個人による戦略変更のみが可能であるので内部安定性は明らか。

$\forall y \notin W^M$ をとる。$|C(y)|$ は奇数である。$|C(y)| > h_0$ のとき $h = |C(y)|-1 \geq h_0$ とすると、$\nabla_{|C(y)|}(C;D) = K$ なので、ある $x \in [h]$ が存在し、$y \lhd x$ が構成できる。また、$|C(y)| < h_0$ のときも $h' = |C(y)|-1$ とするとある $x' \in [h']$ が存在し、$\nabla_{|C(y)|}(C;D) = K$ であるので $y \lhd x'$ が構成できる[28]。したがって外部安定性も満たされる。

(2) $h_0 = 1$ とする。このときも (1) と同様に W_1^M の内部安定性は満たされる。

また、[0] においては、$\nabla_0(D;C) = B-K$ であり、$\forall x \in [1]$ に対して [0]$\lhd x$ を構成できる。$h = 2m$（ただし $m \geq 1$）については、$\forall x \in [2m]$ において $\nabla_{2m}(C;D) = K$ である。したがって、$i \in C(x)$ について、$x_i' = D$ となる $x' \in [2m-1]$ が存在し $x \lhd x'$ が構成できる。

(3) h_0 が3以上の奇数とする。(1) (2) と同様に W_2^M の内部安定性は満たされる。

次に外部安定性を考える。

$h \geq h_0$ に関しては $h_0 = 1$ のときと同様の議論が成り立ち、$\forall x \in [h_0+2\ell-1] \not\subseteq W_2^M$ ($\ell = 1, 2, \ldots$) において $\nabla_{h_0+2\ell-1}(C; D) = K$ であり、ある $x' \in [h_0+2(\ell-1)] \subseteq W_2^M$ が存在し $x \lhd x'$ が構成できる。

$h < h_0$ の場合を考える。$[h_0] \subseteq W_2^M$ であり、$\forall x \in [h_0-1] \not\subseteq W_2^M$ において $\nabla_{h_0-1}(D; C) = B-K$ であるから、ある $x' \in [h_0]$ について $x \lhd x'$ を構成できる。

$\forall x \in [h_0-2]$ については $\nabla_{h_0-2}(C; D) = K$ であるので、ある $x' \in [h_0-3] \not\subseteq W_2^M$ が存在して $x \lhd x'$ を構成できる。

$1 \leq h \leq h_0-4$、ただし h は奇数を考える。このとき $\forall x \in [h]$ において $\nabla_h(C; D) = K$ であるから、$x' \in [h-1] \subseteq W_2^M$ が存在し $x \lhd x'$ を構成できる。

プレイヤーが先見的な場合、Kawasaki and Muto (2009) によって次が成り立つことが示されている。

定理5 (Kawasaki and Muto (2009), Theorem4.1、4.2)：多人数チキンゲームにおいて、唯一の先見的安定集合 W^F は

$$W^F = \{x\}, x \in [h_0]$$

である。

例6：チキンゲーム

$n = 10, B = 5, K = 2$、$h_0 = 5$ とする。プレイヤーの利得関数は次のようになる。

$$f(C,h)=\begin{cases}3, & 5\le h\le 10,\\ -2, & 1\le h<5\end{cases}$$

$$f(D,h)=\begin{cases}5, & 5\le h\le 9\\ 0, & 0\le h<5\end{cases}$$

このときは命題7および定理5より近視眼的・先見的安定集合は、$W_2^M=\cup_{h\in\{0,2,5,7,9\}}[h]$、$W^F=\{x\}$（ただし $x\in[5]$）となる。

4. Concluding remarks

2人ゲームにおいては、Bramsモデルによりナッシュ均衡としては実現されないプレイヤーの協力状況がNMEというある種の安定性を持つ場合があることが示された。ただしNMEは戦略数が増えた場合の分析の煩雑性やオーダーパワーを恣意的に決定することで結果を左右することができてしまうといった点でモデルの適用範囲は限られてくると思われる。Bloch and van den Nouweland (2021) において近視眼的安定集合と安定マッチングとの間の興味深い関連が明らかにされたが、先見的な安定集合と安定マッチングの関連は不明である。囚人のジレンマ・ゲームは、Bramsモデルではパレート支配されるナッシュ均衡がMNEになる、Bloch van den Nouwelandモデルでは W^F が2つの要素を持つ唯一の2×2ゲームになるなど、特殊性が明らかになっている。

多人数ゲームでは、囚人のジレンマ・協調・チキンゲームのいずれでも一意的な先見的安定集合が存在することが示された。協調ゲームでは、近視眼的安定集合は複雑な形になるが、先見的安定集合はパレート効率的なナッシュ均衡により構成される。チキン・ゲームでも（本稿で考えているようなプレイヤー一人のみの戦略変更が許される場合では）パレート効率

的な結果からなる一意の先見的安定集合が得られる[29]。本稿で分析の対象にしたのは、プレイヤーがすべて近視眼的な場合とすべてが先見的な場合であるが、一般には両者が混在している、あるいはゲームの途中で近視眼から先見的に変わるといった状況が通常であろう。そうした場合に安定した状況はどの様になるか等は今後の研究の方向の一つとしたい。

参考文献

Bloch, F and van den Nouweland,A (2021), "Myopic and farsighted stable sets in 2-player strategic-form games." *Games and Economic Behavior. 130:663-683.*

Brams, S (1994), *Theory of Moves.* Cambridge University Press.

Brams, S and Ismail, M,S (2022), "Every normal-form game has a Pareto-optimal nonmyopic equilibrium." *Theory and Decision.* 92:349-362

Chwe, M.S.-Y (1994), "Farsighted coalitional stability." *Journal of Economic Theory.* 63:299-325.

Dawes, Robyn M (1980), "Social Dilemmas." *Annual Review of Psychology.* 31: 169-193.

Greenberg, J (1990), *The theory of social situations: an alternative game theoretic approach.* Cambridge University Press.

Harsanyi, John, C (1974), "An equilibrium-point interpretation of stable sets and a proposed alternative definition." *Management Science.* 20 (11) :1472-1495.

Herings P.J, Mauleon,A and Vannetelbosch,V (2009), "Farsightedly stable networks." *Games and Economic Behavior.* 67:526-541.

Kawasaki, R and Muto, S (2009), "Farsighted stability in provision of perfectly "Lumpy" public goods." *Mathematical Social Sciences* 58: 98-109.

Kilgour, D.M (1984), "Equilibria for far-sighted players." *Theory and Decision.* 16:135-157.

木村邦博 (2002),『大集団のジレンマ』, ミネルヴァ書房 .

Olson, Mancur (1965), *The Logic of Collective Action: Public Goods and the Theory of Groups.* Harvard University Press. (依田博・森脇俊雅訳 (1983)

『集団行為論―公共財と集団理論』ミネルヴァ書房）

Roth, A.E. and Sotomayor, M, A,O (1990), *Two-sided matching: a study in game-theoretic modeling and analysis*. Cambridge University Press.

Taylor, Michael and Hugh Ward (1982), "Chikens, whales and lumpy goods: Alternative model of public goods provision." *Political Studies*. 30 (3) : 350-370.

Lipnowski, Irwin and Shlomo Mital (1983), "Voluntary provision of a pure public good as the game of 'Chicken.'" *Journal of Public Economies*. 20:381-386.

Nakanishi, Noritsugu (2009), "Noncooperative farsighted stable set in an n-player prisoners' dilemma." *International Journal of Game Theory*. 38: 249-261.

Okada A (1993), "The possibility of cooperation in an n-person prisoners' dilemma with institutional arrangements." Public Choice. 77:629-656.

Ray, D and Vohra, R (2015), "The Farsighted stabele set." Econometrica. 83 (3) :977-1011.

Suzuki, A and Muto, S (2005), "Farsighted stability in an n-person prisoners' dilemma." *International Journal of Game Theory*. 33 (3) :431-445.

Von Neumann, J and Morgenstern, O (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

注

1　Departure ゲームという呼称は Kilgour (1984) による。

2　通常の戦略形ゲームでは C_1、D_1 などは戦略と呼ばれるが、Departure ゲームでは後述のように別の意味で「戦略」を設定するので、ここでは「行動」と呼ぶことにする。

3　Brams (1994) p.24、Brams and Ismall (2021) 参照。

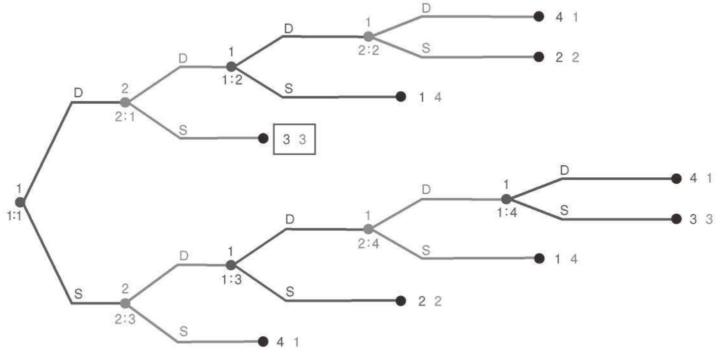
4　通常の戦略形ゲームとの違いは、プレイヤーが同時に戦略を選択するのではなく、特定された初期ステイトから P_1, P_2、P_1、P_2･･･と交互に戦略の変更を考えていくという設定が Departure ゲームの特徴である。2×2戦略形ゲームの場合、初期ステイト候補は4つあり、それぞれの初期ステイトで P_1 になるプレイヤーは2人いるので、8つのケースが考えられる。

5　Brams (1994)、pp.217－219 に結果がまとめられている。

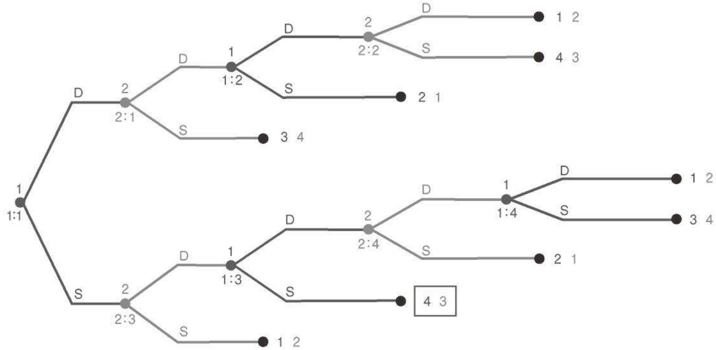
6　初期ステイトは戦略の組（C_1, D_1）等で表すが、バックワードインダクションで導かれるステイトは表記の簡単化のために利得で表すことにする。

7　Brams (1994), Ch3. 及び Brams and Ismail (2022) 参照。

8　ルール（7）を適用した（C_1, D_1）からの NME（3, 3）は、図２だけを考えるとバックワードインダクションの解とはなっておらず合理性に欠けるように思われるが、図２と図３を組み合わせた展開形ゲーム（次図）を考えるとバックワード・インダクションから導かれたものとみなすことができる。



9　Brams（1994）で設定されたオーダーパワー（Order Power）も次図のように、例えばプレイヤー１が先に行動を起こす場合だとすれば、それぞれのプレイヤーが自身に有利な結果を導くことができる権利と解釈できる。



10 Brams (1994) では、Generic な 2 × 2 ゲームのうち（4, 4）となるステイトを含まない 57 のゲームのうち 44 のゲーム（77%）で、少なくとも両者にとって次善の結果（3, 3）、（3, 4）、（4, 3）の 1 つまたは 2 つが NME となることが示されている。また、ナッシュ均衡が NME とならないケースや純粋戦略ナッシュ均衡がないケースでの NME も分析されている。

11 Bloch and van den Nouweland (2021) は 2 人プレイヤーゲームに焦点を絞り総括的に近視眼的・先見的な安定集合について分析している。以下の記述は Bloch and van den Nouweland (2021) による。

12 こうした先見的改善パスのような概念は、Harsanyi (1974) によって Von Neumann-Morgenstern (1944) には先見性の概念が欠けているという批判のもとに導入された。ここでは、Harsanyi (1974) とは若干異なる Chwe (1994) の定義に基づいている

13 このような集合をベースとした解概念は von Neumann and Morgenstern (1944) によって協力ゲームの枠組のもとで導入されたのが最初である。Greenberg (1990) はこの考え方を非協力戦略形ゲームに応用した。

14 特に 2 × 2 ゲームにおいてはナッシュ均衡の個数により分類された完全な先見的安定集合の特性がまとめられている (Proposition 5.1)。

15 例えば $w_1 \succ_m w_2$ であれば、プレイヤー m は w_2 より w_1 の方を好むことを表す。

16 （2 部）マッチング全般については Roth and Sotomayor (1990) 参照。

17 この 2 人ゲームの近視眼的安定性と安定マッチングの関係から、近視眼的安定性の存在や純粋戦略ナッシュ均衡の集合が近視眼的安定集合の部分集合になることなども簡単に示すことができる（Bloch and van den Nouweland (2022), Proposition 3.7)。

18 Departure ゲームでも（C_1, C_2）と（D_1, D_2）が NME になっていた。

19 Bloch and van den Nouweland (2022) , Propsition 6.5 では、2 人のプレイヤーが結託して戦略を変更することが許される状況であれば、任意の $m \times n$ ゲームにおいて singleton の W^F が存在することが示されている。

20 [0] と [n] のみが singleton であり、$h \neq 0, n$ については、[h] は ${}_nC_h$ 個の要素を持つ集合である。

21 一般には $u_i(x) \equiv f(x_i, h)$ とすべきであるが、ここでは簡単化のために利得関数はすべてのプレイヤーについて共通であるとしている。

22 Suzuki and Muto (2005) は、プレイヤー同士の結託が可能である場合について

分析し、個人合理的でパレート効率的なステイトは先見的安定集合であり、それ以外の先見的安定集合が存在しないことが示されている。

23 以下の条件は Okada (1993) に従っている。。

24 以下の特定化されたモデルは、木村 (2002) のモデルを元にしている。

25 このモデルは Kawasaki,R and Muto,S (2009)、木村 (2002) を元にしている。

26 木村 (2002) 5章参照。

27 $h_0=1$ のときは、本命題から $[1]\subseteq W^M$ であり、$[0]$ においては、$\nabla(D;C)=B-K>0$ であるからある $x\in[1]$ が存在し、$[0]\lhd x$ なる近視眼的支配関係が構成できる。したがって、$h_0\neq 1$ のときは $[0]\notin W^M$ である。

28 $|C(y)|=h_0-1$ のときは、$\nabla_{|C(y)|}(\mathrm{C;D})=\mathrm{K}, \nabla_{|C(y)|}(\mathrm{C;D})=B-\mathrm{K}$ となるので、ある $x\in[h_0-2], x'\in[h_0]$ について $y\lhd x$, $y\lhd x'$ の2つの支配関係が構成できる。

29 Kawasaki, R and Muto, S (2009) では、提携によって戦略が変更される場合も考察されている。その場合にはプレイヤー一人による変更のみが許される場合とは違って一意に先見的安定集合は決定しない。